

# Özel Tanımlı Fonksiyonlar

## 1. Tam değer fonksiyonu:

### Tanım:

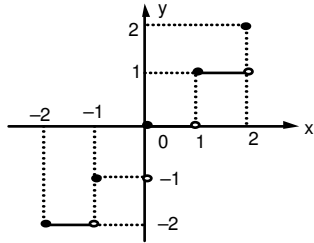
Tamsayı ise kendisi, tamsayı değilse kendinden önce gelen ilk tamsayı (kendinden küçük en küçük tam sayı) olarak tanımlanır ve  $\hat{u} \hat{o}$  biçiminde gösterilir.

Örneğin  $y = \hat{u} x \hat{o}$  fonksiyonunu  $-2 \leq x \leq 2$  aralığında inceleyelim ve grafiğini çizelim;

tanımlanan aralıklar ve fonksiyon değerleri

$-2 \leq x < -1$	ise	$\hat{u} x \hat{o} = -2$	$\rightarrow y = -2$
$-1 \leq x < 0$	"	$\hat{u} x \hat{o} = -1$	$\rightarrow y = -1$
$0 \leq x < 1$	"	$\hat{u} x \hat{o} = 0$	$\rightarrow y = 0$
$1 \leq x < 2$	"	$\hat{u} x \hat{o} = 1$	$\rightarrow y = 1$ ve
$x = 2$	"	$\hat{u} 2 \hat{o} = 2$	$\rightarrow y = 2$ dir.

Grafiğini çizerek aşağıdaki gibi olur.



### ÖRNEK :

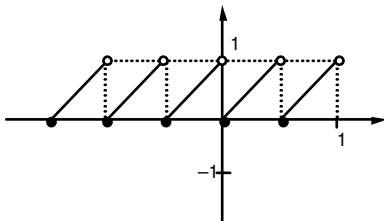
$y = x - \hat{u} x \hat{o}$  fonksiyonu  $-3 < x < 2$  aralığında grafiğini çiziniz.

### Çizim:

İncelenecek aralıkları alalım.

$-3 < x < -2$	$\rightarrow y = x + 3$
$-2 \leq x < -1$	$\rightarrow y = x + 2$
$-1 \leq x < 0$	$\rightarrow y = x + 1$
$0 \leq x < 1$	$\rightarrow y = x$
$1 \leq x < 2$	$\rightarrow y = x - 1$ bulunur.

Bunların grafiklerini çizerek



grafiği bulunur.

### ÖRNEK :

$\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = 1$  biçiminde verilen fonksiyonun grafiğini çiziniz.

### Çizim :

$\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = 1$  olması ancak

$\lfloor x \rfloor = 1$  ve  $\lfloor y \rfloor = 1$  yada  $\lfloor x \rfloor = -1$  ve  $\lfloor y \rfloor = -1$

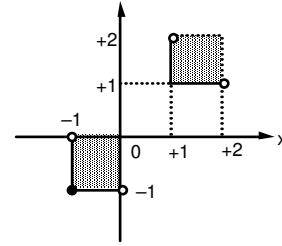
olması ile mümkündür. O halde

$\lfloor x \rfloor = 1$  ve  $\lfloor y \rfloor = 1 \rightarrow 1 \leq x < 2$ , ve  $1 \leq y < 2$

$\lfloor x \rfloor = -1$  ve  $\lfloor y \rfloor = -1 \rightarrow -1 \leq x < 0$ ; ve  $-1 \leq y < 0$

olması gerekir.

Grafiğini çizelim.



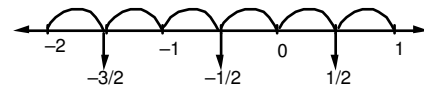
Taralı bölge grafiği bulunur.

### ÖRNEK :

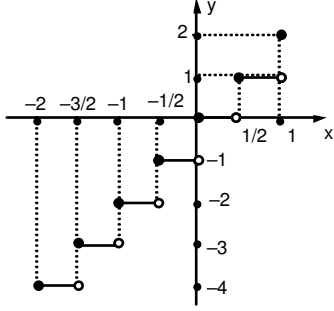
$-2 \leq x \leq +1$  aralığında  $y = \hat{u} 2x \hat{o}$  fonksiyonu grafiğini çiziniz.

### Çizim:

İnceleme aralığını bölelim.



görüldüğü gibi, bu aralık incelenmek için 6 parçaya ayrılarak incelenmesi ve grafiğinin çizilmesi gerekir.



$$-2 \leq x < -\frac{3}{2} \rightarrow f(x) = -4$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < -1 \rightarrow f(x) = -3$$

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) = -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \rightarrow f(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \rightarrow f(x) = 1$$

$$x = 1 \rightarrow f(x) = 2$$

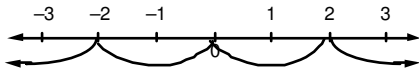
grafığı çizilmiş olur.

**ÖRNEK :**

$-3 \leq x < 3$  arasında  $y = \hat{u} \frac{1}{2}$  ö tamdeğer fonksiyonunun grafığını çiziniz.

**Çizim:**

İnceleme aralığını bölelim.



görüldüğü gibi verilen aralık için inceleme dört aralıkla yapılacaktır.

$$-3 \leq x < -2 \rightarrow f(x) = \hat{u} \frac{1}{2} x \hat{o} = -2$$

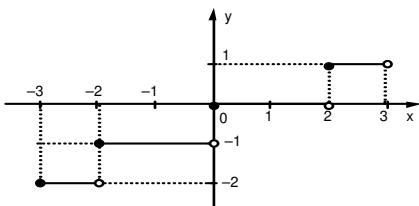
$$-2 \leq x < 0 \rightarrow f(x) = \hat{u} \frac{1}{2} x \hat{o} = -1$$

$$0 \leq x < 2 \rightarrow f(x) = \hat{u} \frac{1}{2} x \hat{o} = 0$$

$$2 \leq x < 3 \rightarrow f(x) = \hat{u} \frac{1}{2} x \hat{o} = 1$$

dir. Grafığını çizelim.

(Eşitliğin bulunmadığı noktaların grafiğe dahil olmadığını görünüz.)



**ÖRNEK :**

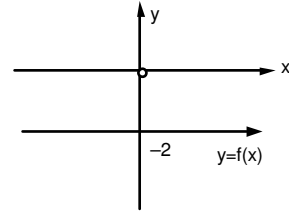
$$f(x) = \llbracket 2x + 1 \rrbracket - \llbracket 2x + 3 \rrbracket$$

fonksiyonunu inceleyiniz ve grafığını çiziniz.

**Çizim:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \llbracket 2x + 1 \rrbracket - \llbracket 2x + 3 \rrbracket \\ &= \llbracket 2x \rrbracket + 1 - (\llbracket 2x \rrbracket + 3) \\ &= 1 - 3 = -2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Grafığı



bulunur.

**İşaret Fonksiyonu:**

**Tanım:**

İşaret fonksiyonu; fonksiyonun başına Sgn getirilir ve anlamı

$$\text{Sgn } f(x) = \begin{cases} 1 & ; f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0 & ; f(x) = 0 \text{ ise} \\ -1 & ; f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

**Örneğin**

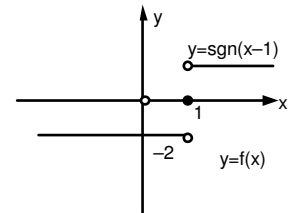
$y = \text{Sgn}(x - 1)$  fonksiyonu;

$x - 1 > 0$  yani  $x > 1$  ise  $y = +1$

$x - 1 = 0$  yani  $x = 1$  ise  $y = 0$

$x - 1 < 0$  yani  $x < 1$  ise  $y = -1$

O halde grafik



iki yarı doğru ve  $x = 1$  noktası olur.

**Not:** Sgn (işaret) fonksiyonları için fonksiyonun işaretini inceler ve pozitif olduğu yerler +1 negatif olduğu yerler -1 dir.

0 olduğu yerlerde 0 olarak alınır.

**ÖRNEK :**

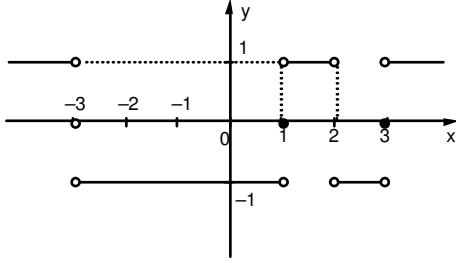
$y = \text{Sgn} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9}$  grafiğini çiziniz.

**Çizim:**

Önce verilen fonksiyonun işaretini inceleriz.

	-3	1	2	3					
$x^2 - 3x + 2$	+	+	0	-	0	+	+		
$x^2 - 9$	+	0	-	-	-	0	+		
$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9}$	+		-	0	+	0	-		+
$\text{Sgn} f(x)$	+1	↓	-1	0	+1	0	-1	↓	+1
		Tan>ms>z			Tan>ms>z				

Grafik, aşağıdaki gibi çizilmiş olur.



**ÖRNEK :**

$y = x^2 + \text{Sgn}(x - 1)$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

**Çizim:**

Önce işaret fonksiyonunu alalım.

$\text{Sgn}(x - 1)$  in değeri  $x < 1$  ise

$\text{Sgn}(x - 1) = -1$ ;  $x = 1$  ve  $\text{Sgn}(x - 1) = 0$

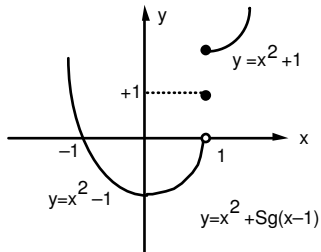
$x > 1$  ise  $\text{Sgn}(x - 1) = +1$  olduğunda verilen fonksiyon:

$x < 1 \rightarrow f(x) = x^2 - 1$

$x = 1 \rightarrow f(x) = x^2 \rightarrow f(1) = 1$

$x > 1 \rightarrow f(x) = x^2 + 1$  olur.

Bunların verilen aralıklarda grafiklerini çizelim.



**ÖRNEK :**

$-2 < x < +2$  aralığında  $y = \hat{u} x \hat{o} + \text{Sgn}(x + 1)$  grafiğini çiziniz.

**Çizim:**

Aralıklara göre fonksiyonunu değerlerini bulalım.

$-2 < x < -1 \rightarrow y = -2 - 1 = -3$

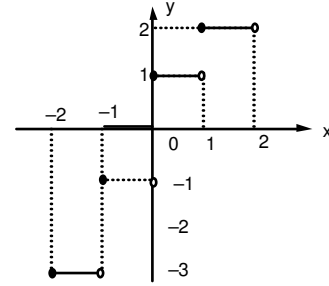
$x = -1 \rightarrow y = -1$

$-1 \leq x < 0 \rightarrow y = 0$

$0 \leq x < 1 \rightarrow y = +1$

$1 \leq x < 2 \rightarrow y = 2$

Grafik



**ÖRNEK :**

$y = \frac{x}{\text{Sgn}(x - 2)}$  grafiğini çiziniz.

**Çizim:**

Aralıkları bulalım.

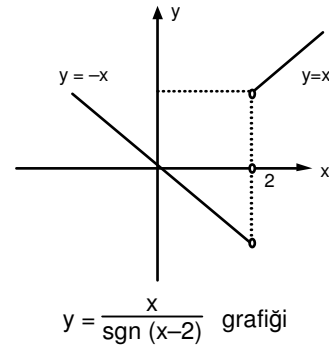
$x > 2 \rightarrow \text{Sgn}(x - 2) = +1$  den  $y = x$

$x = 2 \rightarrow \text{Sgn}(x - 2) = 0$  y tanımsız

$x < 2 \rightarrow \text{Sgn}(x - 2) = -1$  den  $y = -x$

bulunur.

Bu aralıklara göre grafik çizilirse;



$y = \frac{x}{\text{sgn}(x-2)}$  grafiği

**ÖRNEK :**

$y = \text{Sgn}(\sin x)$  grafiğini çiziniz.

$[0, 2\pi]$  aralığı için

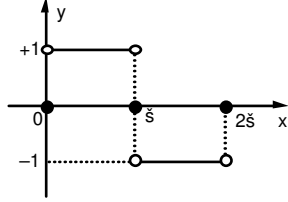
$x = 0 \rightarrow \sin x = 0$  ve  $y = \text{Sgn}(\sin x) = 0$

$0 < x < \pi \rightarrow \sin x > 0$  ve  $y = \text{Sgn}(\sin x) = +1$

$x = \pi \rightarrow \sin x = 0$ ;  $y = \text{Sgn}(\sin x) = 0$

$\pi < x < 2\pi \rightarrow \sin x < 0$ ;  $y = \text{Sgn}(\sin x) = -1$

bulunur. O halde grafik:



**ÖRNEK :**

$y = \text{Sgn}(\text{Sgn}(x + 1))$  grafiğini çiziniz.

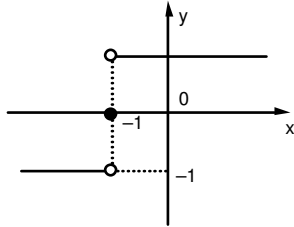
**Çizim:**

$\text{Sgn}(\text{Sgn}(x + 1)) = \text{Sgn}(x + 1)$  olacağına dikkat ediniz.

O halde

$x < -1 \rightarrow y = -1$ ;  $x = -1 \rightarrow y = 0$

ve  $x > -1$  için  $y = +1$  bulunur.



**MUTLAK DEĞER FONKSİYONU:**

**Tanım:**

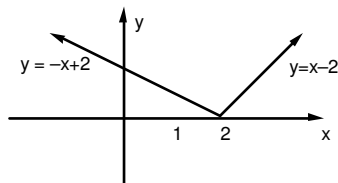
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0 & ; f(x) = 0 \text{ ise} \\ -f(x) & ; f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Örneğin  $f(x) = x - 2$  ise

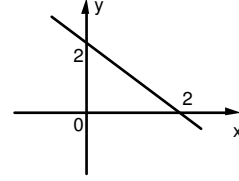
$y = |f(x)|$  yani  $y = |x - 2|$  fonksiyonu

$$y = \begin{cases} x - 2 & ; x > 2 \text{ ise} \\ 0 & ; x = 2 \text{ ise} \\ -(x - 2) & ; x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

grafiğini çizelim.



**Not :**  $y = x - 2$  grafiğinin yandaki biçimde olduğunu biliyorsunuz.  $y = |x - 2|$  grafiği için, bu grafiğin x ekseninin altında bulunan kısmının üst kısma simetrisinin çizildiğine dikkat ediniz.



**ÖRNEK :**

$y = |x^2 - 3x + 2|$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

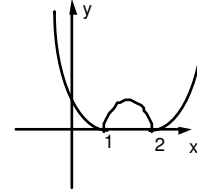
$x^2 - 3x + 2$  fonksiyonunun işaretini inceleyelim.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0 - 0	+

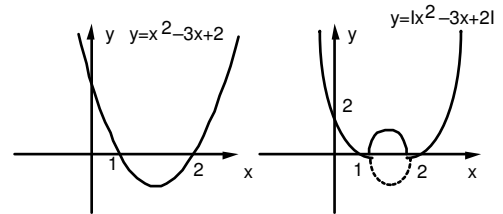
dan yararlanarak

$$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & ; x > 2 \text{ ve } x < +1 \text{ ise} \\ 0 & ; x = 2 \text{ ve } x = 1 \text{ ise} \\ -(x^2 - 3x + 2) & ; +1 < x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Grafik:



Pratikte  $y = x^2 - 3x + 2$  grafiği içizilir. x eksenini altındaki kısmın üste simetrisi alınır.



**ÖRNEK :**

$y = |x - 2| + |x + 1|$  fonksiyonunu grafiğini çiziniz.

**Grafik çizimi:**

Fonksiyonun her bir mutlak değerinin işaretini inceleyerek, fonksiyonu belirleyelim.

x		-1	2	
$x - 2$		-	0	+
$x + 1$		-	0	+

tablosuna göre

$$-1 > x \rightarrow y = -(x-2) - (x+1) = -2x + 1$$

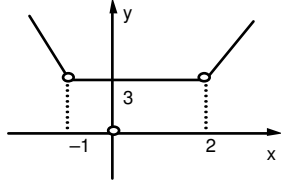
$$x = -1 \rightarrow y = |-1-2| + |-1+1| = 3$$

$$-1 < x < 2 \rightarrow y = -(x-2) + (x+1) = 3$$

$$x = 2, y = 10 + |2+1| = 3$$

$$x > 2 \rightarrow y = x-1 + x+2 = 2x+1$$

Grafiği



**ÖRNEK :**

$y = |x-3| - |x+1|$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

**Çizim:**

Önce mutlak değerlerin işaretini inceleyelim.

x	-1	3	
x-3	-	0	+
x+1	-	0	+

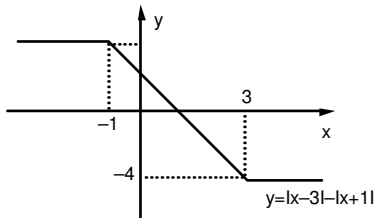
$$x \leq -1 \rightarrow y = -(x-3) + (x+1) = +4$$

$$-1 < x < +3 \rightarrow y = -(x-3) - (x+1) = -2x + 2$$

$$x = 3 \rightarrow y = -4$$

$$x > 3 \rightarrow y = (x-3) - (x+1) = -4$$

Buna göre grafik



**ÖRNEK :**

$|x| + |y| = 2$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

**Çizim:**

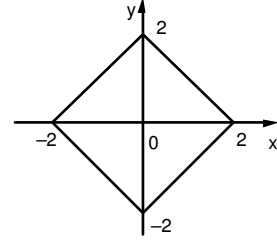
I)  $x > 0, y > 0 \rightarrow x + y = 2$

II)  $x < 0, y > 0 \rightarrow -x + y = 2$

III)  $x < 0, y < 0 \rightarrow -x - y = 2$

IV)  $x > 0, y < 0 \rightarrow x - y = 2$

Grafik çizersek



**ÖRNEK :**

$y = |x - \text{Sgn } x|$  Grafiğini çiziniz.

Çizim önce  $y = x - \text{Sgn } x$

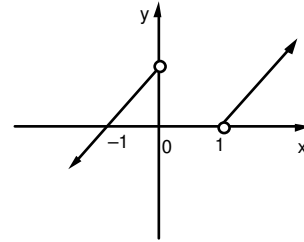
Grafiğini çizeriz.

$$x > 0 \rightarrow y = x - 1$$

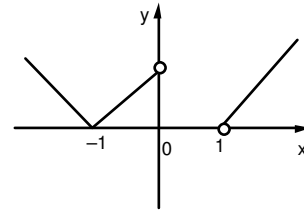
$$x < 0 \rightarrow y = x + 1 \text{ dir.}$$

Bu grafiğin x ekseninin altında kalan kısmının, x eksenine göre simetriğini alırız.

$y = x - \text{Sgn } x$  grafiği



$y = |x - \text{Sgn } x|$  grafiği aşağıdaki gibidir.



**Mutlak değerlerin grafiği için pratik kural:**

1) Eğer fonksiyon tek mutlak değer içerisinde ise önce fonksiyonun grafiği çizilir. Sonra x ekseninin altında kalan kısmın x eksenine göre simetriği alınır.

(Yukarıdaki örneği inceleyiniz.)

2) Eğer fonksiyon birinci dereceden ve bir kaç tane mutlak değer toplamından ya da farkından oluşuyorsa; her bir mutlak değer içerisinde sıfır yapan x değerleri için fonksiyonun alacağı değerler bulunur. Bulunan bu x değerlerinden en küçüğünden küçük bir x ile en büyüğünden büyük bir x değeri için fonksiyonların değerleri bulunur.

Bir koordinat sisteminde bulunan bu noktalar işaretlenir. İşaretlenen bu noktalar birleştirilince grafik çizilmiş olur.

**ÖRNEK :**

$y = |x + 5| - |x - 2|$  grafiğini çiziniz.

**Çizim:**

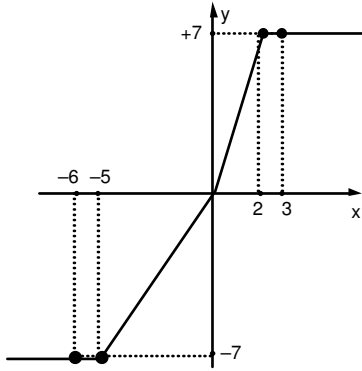
$|x + 5| = 0 \rightarrow x = -5$  için  $y = -7$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$  için  $y = +7$

-5 den küçük  $x = -6$  için  $y = 1 - 8 = -7$

2 den büyük  $x = 3$  için  $y = 8 - 1 = +7$

Bu noktalar bir koordinat sisteminde gösterilerek aşağıdaki grafik çizilmiştir.



**ÖRNEK :**

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$f(x) = |x| + |x + 1| - |x - 3|$  grafiğini çiziniz.

**Çizim:**

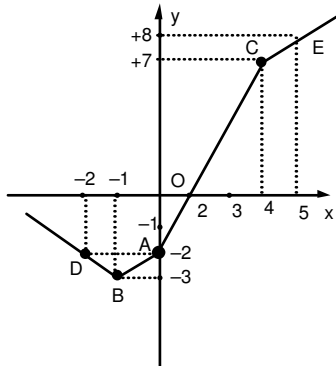
$|x| = 0, x = 0 \rightarrow f(0) = 0 + 1 - 3 = -2 \in (0, -2) (A)$

$|x + 1| = 0, x = -1 \rightarrow f(-1) = 1 + 0 - 4 \in (-1, -3) (B)$

$|x - 3| = 0, x = +3 \rightarrow f(+3) = 3 + 4 = 7 \in (3, 7) (C)$

$-2 < -1 \rightarrow x = -2 \rightarrow f(-2) = 2 + 1 - 5 = -2 \in (-2, -2) (D)$

$3 < 4 \rightarrow x = 4 \rightarrow f(4) = 4 + 5 - 1 = 8 \in (3, 8) (E)$



$x$  in en küçük değerine karşı gelen D noktasından başlayarak  $x$  in sıra ile (bulunan teğetlerinden oluşan) noktaları birleştirilerek grafik çizilmiştir.

**KONU TESTİ -1**

1.  $f(x) = \lfloor 2x + 1 \rfloor - \text{Sgn} \frac{3x + 1}{18}$  ise  $f(-\frac{1}{3})$  değeri nedir?

- A) -5 B) -4 C) -3 D) 3 E) 2

2.  $f(x) = \left\lfloor \frac{7x + 3}{5} \right\rfloor$  iken  $f(-3)$  değeri nedir?

- A) 1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

3.  $f(x) = \frac{3 - \lfloor x \rfloor}{x - 3}$  iken  $f(3, 1)$  nedir?

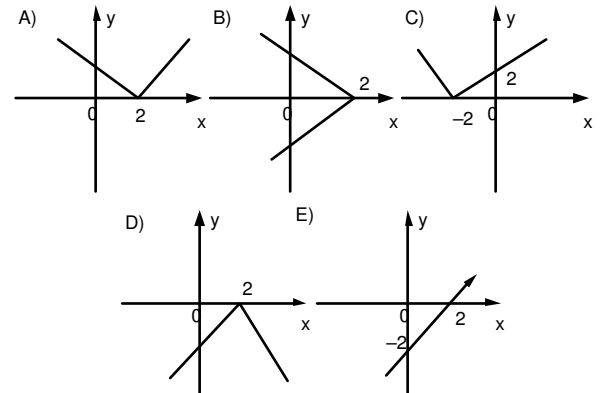
- A) -1 B) -2 C) 1  
D) 0 E) Tanımsız

4.  $f(x) = \frac{\lfloor 9 - \lfloor x + 5 \rfloor \rfloor}{x - 4}$  ise  $f(4, 8)$  in değeri nedir?

- A) 0 B)  $\frac{4}{5}$  C)  $\frac{1}{5}$   
D)  $-\frac{4}{5}$  E) Tanımsız

5.  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} : f(x) = |x - 2|$

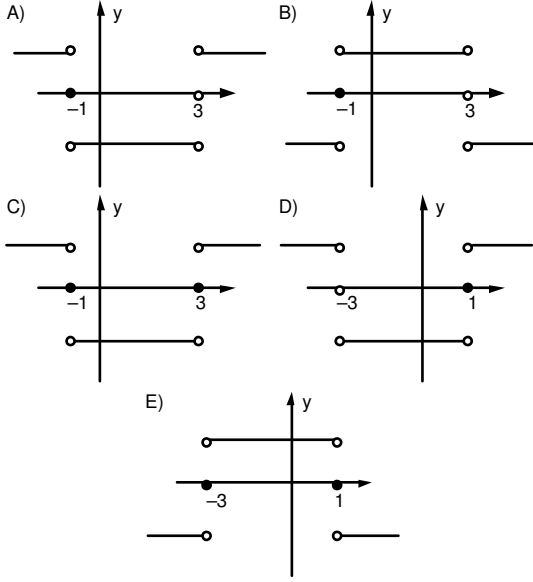
fonksiyonunun grafiği hangisidir?



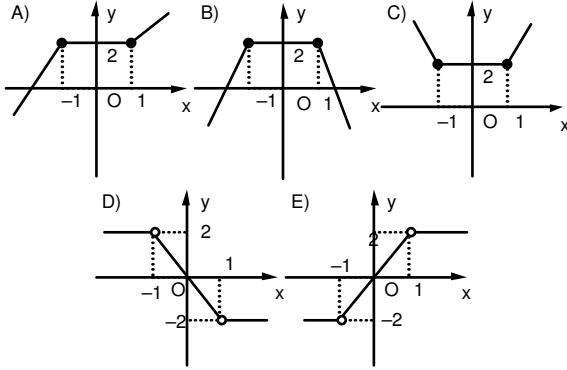
6.  $f(x) = |x - 1| - 3$  fonksiyonunda  $f(-2)$  nin değeri nedir?

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 3

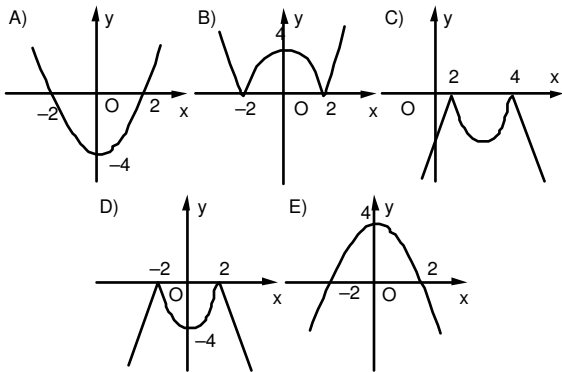
7.  $R \rightarrow^f R : f(x) = \text{Sgn} \frac{x-3}{x+1}$  grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



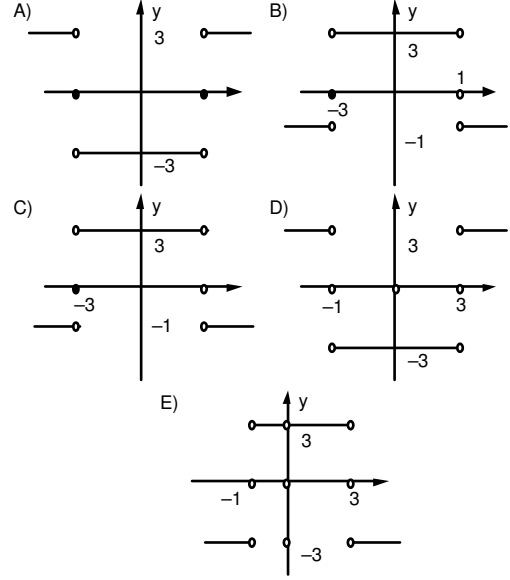
8.  $R \rightarrow^f R : f(x) = |x+1| + |x-1|$  grafiği hangisidir?



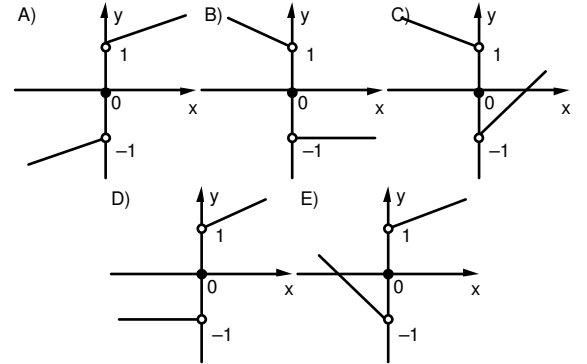
9.  $R \rightarrow^f R : f(x) = |x^2 - 4|$  fonksiyonunun grafiği hangisidir?



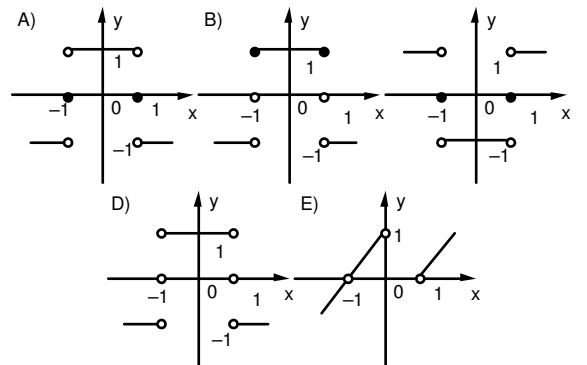
10.  $R \rightarrow^f R : f(x) = \text{Sgn} \frac{3+x}{1-x}$  fonksiyonunun grafiği hangisidir?



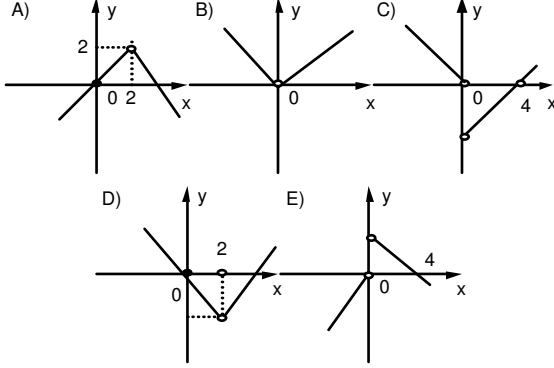
11.  $R \rightarrow^f R : f(x) = |x| + \text{Sgn}x + x$  fonksiyonunun grafiği hangisidir?



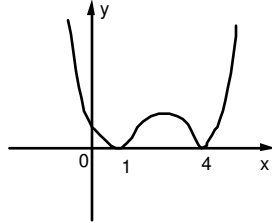
12.  $y = \text{Sgn}(x^2 - 1)$  grafiği hangisidir?



13.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = |x - 2| - 2$  grafiği hangisidir?



14. Yandaki fonksiyon grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

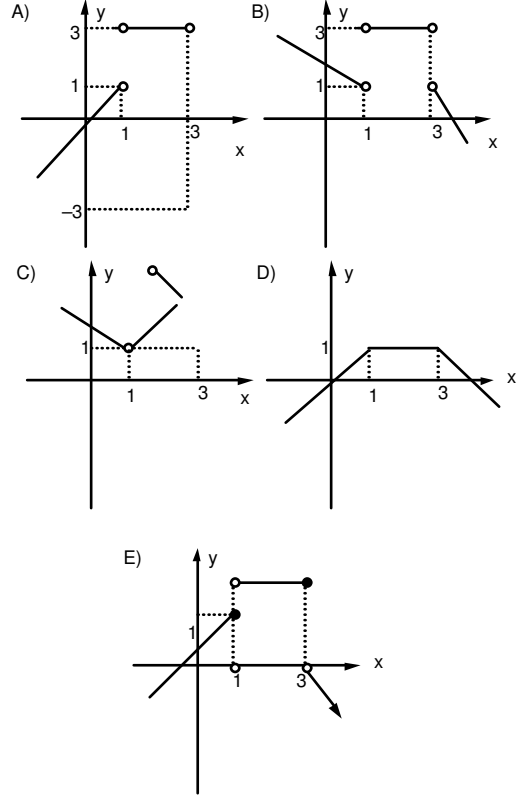


- A)  $f(x) = \text{Sgn}(x^2 - 4)$
- B)  $f(x) = \text{Sgn}(x^2 - 5x + 4)$
- C)  $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$
- D)  $f(x) = |x^2 - 5x - 4|$
- E)  $f(x) = x^2 + |5x + 4|$

15.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \text{ ise} \\ 3, & 1 < x < 3 \text{ ise} \\ -x, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiği hangisidir?



16.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ye tanımlı :  $f(x) = |3x + 1| + \text{Sgn}(x - 1)$   
 $g(x) = \text{Sgn}(x - 2)$  ise  
**(gof) (1) in değeri nedir?**

- A) 2 B) 1 C) -1 D) -2 E) 0



17.  $f(x) = |x| + |x - 1|$  grafiği hangisidir?

