MC

Cebir Notları

Gökhan DEMİR, gdemir23@yahoo.com.tr

Permutasyon kombinasyon

TEMEL SAYMA PROBLEMLERİ

Bir kümenin kaç elemanlı olduğunu S = {1, 2, 3, … , n, n + 1, …} kümesinden yararlanarak saptamaya **eşleme yoluyla sayma** denir.

Örneğin, bir okulun toplantı salonunda kaç oturma yerinin var olduğunu saptamak için oturma yerlerinden birini 1 ile eşleriz. Böylece o oturma yerini saymış oluruz. Oturma yerlerinden bir başkası 1 in ardışığı olan 2 ile eşlenerek salondaki oturma yerlerinden 2 tanesi sayılmış olur. Böyle devam edilerek en son oturma yeri ile eşlenen bir sayma sayısına ulaşılır. Böylece salondaki oturma yerleri sayılmış olur. Salondaki en son oturma yeri ile eşlenen sayma sayısı salondaki oturma yerlerinin sayısına eşittir.

Sonlu bir kümenin elemanlarını, 1 den başlayarak ardışık sayma sayıları ile her bir elemana yalnız ve yalnız bir sayma sayısı karşılık getirecek biçimde eşleyerek, bu kümenin elemanları sayısını bulmaya **eşleme yoluyla sayma** denir. Örneğin bir sınıfta kaç kişi olduğu çoğu kez eşleme yolu ile saptanır.

Bir sinema salonunun bir yanındaki oturma yerlerinin çift sayı ile öteki yanındaki yerlerinin tek sayı ile numaralanmış olduğunu varsayalım. Salonda kaç tane oturma yeri bulunduğunu, çift sayı ile numaralanmış koltuklarla tek sayıyla numaralanmış koltukları sayıp bulduğumuz iki sayıyı toplayarak söyleyebiliriz.

A ve B kümelerinden her biri sonlu kümeler olsun. Bu iki küme ayrık iseler bunların birleşiminin eleman sayısı A'nın eleman sayısı ile B'nin elemanları sayısı toplamına eşittir. Sonlu ve ayrık iki kümenin birleşimlerinin elemanları sayısını bu yolla bulmaya ***toplama yoluyla sayma*** denir.

Örneğin, okulumuz 9/A sınıfında 4 kız öğrenci, 9/B sınıfında 5 kız öğrenci olduğuna göre bu iki sınıftaki kız öğrenci sayısı 5+4 = 9 dur. Böylece toplama yoluyla 2 sınıftaki öğrenci sayısını bulmuş oluruz.

Örnek. *x ve y tamsayı olmak üzere* $x^2 + y^2 \leq 4$ *eşitsizliğini sağlayan* (x, y) *tamsayı ikililerinin sayısını bulunuz.*
Çözüm: Problemi 5 ayrık durumda inceleyeceğiz. $x^2 + y^2 = 0, 1, 2, 3, 4$'tür. Şimdi her durumu tek tek ele alalım.

$x^2 + y^2 = 0$ ise $\{(0, 0)\}$
$x^2 + y^2 = 1$ ise $\{(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}$
$x^2 + y^2 = 2$ ise $\{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$
$x^2 + y^2 = 3$ ise $\{\ \}$
$x^2 + y^2 = 4$ ise $\{(0, 2), (2, 0), (0, -2), (-2, 0)\}$

Toplam 13 farklı ikili vardır.

Bir sinema salonunda her bir sırada m tane oturma yeri olmak üzere n tane sıranın var olduğunu varsayalım. O zaman salonda $m \cdot n$ tane oturma yeri olduğunu söyleriz.

İkişer ikişer ayrık ve her biri sonlu m elemanlı olan n, tane kümenin birleşiminin eleman sayısı $m \cdot n$'dir. Bu kümelerin birleşimlerinin elemanları sayısını bu yöntemle bulmaya **çarpma yoluyla sayma** denir.

Örnek. *Bir depoda demirbaş kayıtlarına göre* 28734 *tane mermi vardır. Mermiler aynı yoğunlukta ve hacimde olduğuna göre bu mermileri sayarak teslim almak isteyen bir ere pratik bir sayma yöntemi önerebilir misiniz?*
Çözüm: Mermileri saymak için birçok yöntem bulunabilir. Bunlardan bir tanesi şu olabilir; Mermi öbeğinden, olabildiği kadar, mermi alınarak bunlar hem eşleme yolu ile sayılır, hem de terazi ile tartılır. Böylece m tane merminin n kilogram geldiği saptanır. Gramlar değiştirilmeden mermi yığınındaki mermiler tükeninceye kadar ardı ardına tartı yapılarak kaç tartı yapıldığı not edilir.

Eğer p tane tartı yapılmışa, her bir tartıda m tane mermi bulunduğundan p tartı ile $m \cdot p$ tane mermi tartılmış olur. Artan olursa ayrıca tartılır.

Sıralı ikili, Sıralı üçlü, Sıralı n-li

a, b, c ve d herhangi elemanlar olsun. Birbirine eşitliği

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow (a = c \text{ ve } b = d)$$

denkliği ile tanımlanan (a, b) nesnesine **sıralı ikili**, a'ya sıralı ikilinin **birinci bileşeni**, b'ye sıralı ikilinin **ikinci bileşeni** denir.

a ve b birer eleman olsun. (a, b)'ye bir sıralı ikili denir. Bu tanıma göre a ≠ b ise (a, b) sıralı ikilisi, (b, a) sıralı ikilisine eşit değildir!

Örneğin, beş kişilik bir grubun katıldığı bir koşuda Mustafa'nın birinci, Selim' in ikinci geldiğini varsayalım. Bunu anlatmak için (Mustafa, Selim) sıralı ikilisi yazılırsa, Mustafa'nın birinci, Selim'in ikinci geldiği (Selim, Mustafa) ikilisi ile yazılamaz. Başka bir deyişle (Mustafa, Selim) ≠ (Selim, Mustafa)

a, b, c, d, e, f herhangi elemanlar olsun.

$$(a, b, c) = (d, e, f) \leftrightarrow (a = d, b = e, c = f)$$

ise (a, b, c) nesnesine **sıralı üçlü**, a'ya sıralı üçlünün birinci bileşeni, b'ye ikinci bileşeni, c'ye üçüncü bileşeni denir.

$i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ için x_i ve y_i elemanları verilsin.

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \leftrightarrow (i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ için $x_i = y_i)$

ise $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ nesnesine **sıralı *n*-li** denir. $k \in \{1,2,3, \ldots,n\}$ için x_k ya sıralı n-linin k'nıncı bileşeni denir.

Saymanın Temel İlkesi

A = {a, b, c}, B = {1, 2} kümeleri verilsin.

A×B = {(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)}

Kartezyen çarpımında görüldüğü gibi $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere oluşturulabilen (x, y) biçimindeki sıralı ikili sayısı $n(A) \cdot n(B) = 3 \cdot 2 = 6$'dır.

Herhangi bir işin yapılması için k_1 tane yol bulunsun. Birinci iş bu yollardan herhangi biriyle yapıldıktan sonra ikinci bir işin yapılması için yapılması için k_2 tane yol bulunsun. İkinci iş de bu yollardan biri ile yapılsın. Böyle devam ederek üçüncü, dördüncü, ...,n' inci işin yapılması için sıra ile k_3, k_4, ..., k_n tane yol varsa bu n işin yapılması için $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$ tane farklı yol vardır.

Bu ilke matematik dili ile aşağıdaki biçimde anlatılır.

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ kümeleri sırasıyla $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ elemanlı sonlu kümeler olsun. Bu kümelerden $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, $x_3 \in A_3$, …, $x_n \in A_n$ olmak üzere

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

biçiminde birbirinden farklı $k_1.k_2.k_3. \ldots .k_n$ tane sıralı n'li yazılabilir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin elemanları ile 3 basamaklı kaç sayı yazılabilir?

Çözüm:… Problemi, "A'dan B'ye, B'den C'ye, C'den D'ye üçer yol vardır. Acaba bir yolcu A'dan D'ye kaç değişik yoldan gidebilir? " şeklinde yorumlayabiliriz. Saymanın temel ilkesine göre bu yolların sayısı 3.3.3=27 dir.

Bu yolların listesini aşağıdaki tablo ile yapabiliriz:

	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)

	1	2	3
(1,1)	(1,1,1)	(1,1,2)	(1,1,3)
(1,2)	(1,2,1)	(1,2,2)	(1,2,3)
(1,3)	(1,3,1)	(1,3,2)	(1,3,3)
(2,1)	(2,1,1)	(2,1,2)	(2,1,3)
(2,2)	(2,2,1)	(2,2,2)	(2,2,3)
(2,3)	(2,3,1)	(2,3,2)	(2,3,3)
(3,1)	(3,1,1)	(3,1,2)	(3,1,3)
(3,2)	(3,2,1)	(3,2,2)	(3,2,3)
(3,3)	(3,3,1)	(3,3,2)	(3,3,3)

2.Çözüm: $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$ a yüzler, b onlar, c birler basamağıdır. a, b, c yerine verilen A kümesinin elemanlarından biri yazılabilir. Saymanın temel ilkesine göre

$n(A).n(A).n(A) = 3.3.3 = 27$ bulunur.

Örnek: $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin elemanlarıyla rakamları birbirinden farklı 5 ile bölünebilen 3 basamaklı kaç sayı yazılabilir?

Çözüm*:* 5 ile bölünebilen sayıların son rakamı 5 veya sıfırdır. Son rakamı 5 ise birler basamağı için 1, yüzler basamağı için8 (“0” yazılamaz), onlar basamağı için 8 seçenek vardır. Buna göre son rakamı 5 olan ve 5 ile bölünebilen 3 basamaklı 8.8.1 = 64 tane sayı vardır.

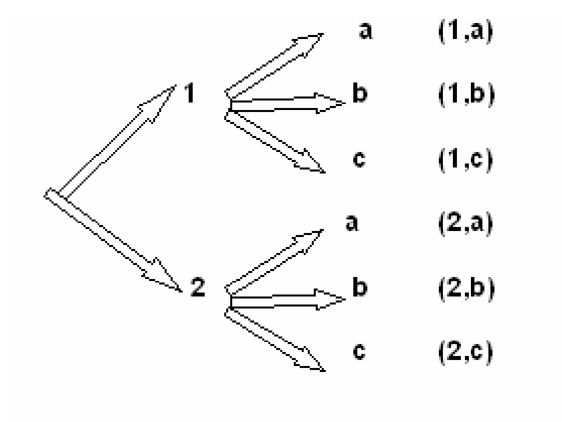
Son rakamı sıfır ise birler basamağı için 1, yüzler basamağı için 9 ve onlar basamağı için 8 seçenek vardır. Buna göre son rakamı sıfır olan 9.8.1 = 72 sayı yazılabilir.

Verilen koşullara göre 5 ile bölünebilen 64 + 72 = 136 sayı yazılabilir.

Örnek*:* Spor toto oyununda 13 maçtan 6 tanesini her kolonda aynı biçimde tahmin ettiğimizi ve sonuçta bu tahminimizin doğru çıkacağını varsayarak bir kolonda 13 maçın doğru çıkması için kaç kolon oynamak gereklidir?
Çözüm*:* 6 maç için 1 seçenek, geriye kalan 7 maçın her biri için 3 seçenek vardır. Buna göre 1.1.1.1.1.1.3.3.3.3.3.3.3 = 2187 kolon oynamak gerekir.

Örnek*:* Spor toto oyununda 13 maçı da doğru tahmin etmek için en az kaç kolon oynamak gereklidir.
Çözüm*:* 3.3.3.3.3.3.3.3.3.3.3.3.3 = 1 594 323 tane kolon oynamak gereklidir.

Örnek*:* *A = {1,2}, B = {a,b,c*} olduğuna göre *AxB* kümesi kaç elemanlıdır? Neden?
Çözüm: Saymanın temel ilkesine göre *AxB* kümesi n(A).n(B) = 2*3 = 6 elemanlıdır. Bunu *AxB* = {1,2} x {a,b,c} = {(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)} şeklinde de bulabiliriz. Ağaç diyagramı ile de aşağıdaki gibi gösterebiliriz:



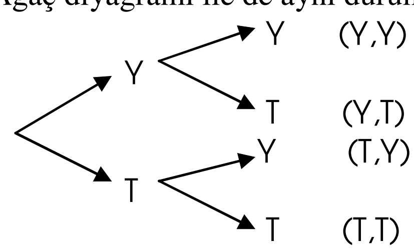
Örnek*:* 15 üyeli bir kuruldan bir başkan, bir başkan yardımcısı ve bir sekreter seçilecektir. Seçim kaç türlü sonuçlanabilir?
Çözüm*:* Başkan 15 değişik biçimde seçilebilir. Başkan yardımcısı geriye kalan 14 arasından 14 değişik biçimde seçilebilir. Sekreter ise geriye kalan 13 üye arasından 13 değişik biçimde seçilebilir. Seçim 15.14.13 = 2730 biçimde sonuçlanır.

Örnek:* Bir madeni para havaya atıldığında ya yazı, ya da tura gelir. Bu paranın ark arkaya havaya iki kez atılmasında birbirinden farklı kaç durum elde edilir? Bu durumları yazınız.
Çözüm*:* Saymanın temel ilkesine göre 2.2 = 4 durum elde edilebilir.

Bu durumlar *(Y,Y), (Y,T), (T,Y), (T,T)* şeklindedir. Bu durumları tablo ile de bulabiliriz:

	Y	T
Y	(Y,Y)	(Y,T)
T	(T,Y)	(T,T)

Ağaç diyagramı ile de aynı durumları bulabiliriz:



Örnek*:* *A* = {1, 2, 4, 5, 7, 9} kümesinin elemanları ile üç basamaklı 600’ den küçük kaç sayı yazılabilir?
Çözüm: $\boxed{X}\boxed{Y}\boxed{Z}$ şekli üç basamaklı bir sayı gösterir. Yüzler basamağına 1,2,3,4 yazılabileceğinden X, 4 seçeneklidir. Y ve Z ise altışar seçenekli olacağından 600’ den küçük 4.6.6 = 144 tane sayı vardır.

Örnek*:* Bir kilidin şifresi, birinci ve ikinci bileşenleri alfabemizdeki harflerden, öteki bileşenleri rakamlardan oluşan bir sıralı dörtlüdür. Bu kilidin kaç değişik biçimde kilitlenebileceğini bulunuz.
Çözüm*:* Şifreye uygun sıralı dörtlüyü *(X,Y,Z,T*) biçiminde gösterelim. *X* ve *Y* yerine 29 harften birisi, Z, T yerine ise {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin elemanlarından biri yazılabilir. Saymanın temel ilkesine göre 29.29.10.10 = 84100 tane sıralı dörtlü vardır. Öyleyse bu kilit 84100 değişik biçimde kilitlenebilir.

Örnek: Bir mobilya satıcısında 9 tip koltuk takımı ve 5 tip sehpa takımı vardır. Bir koltuk ve bir sehpa takımı alacak olan bir kimse için kaç tane koltuk-sehpa takımı seçeneği vardır?
Çözüm: Alıcı koltuk takımını 9 değişik biçimde seçebilir. Bu seçimlerden her biri için sehpa takımını da 5 değişik biçimde seçebileceğinden bir koltuk-sehpa takımını 9.5 = 45 biçimde seçer.

Örnek: Her bir telefon için 6 basamaklı bir sayı kullanarak sıfır ile başlamayan kaç tane telefon numarası verilebilir?
Çözüm: Telefon numarası (x,y,z,t,u,v) biçiminde olsun. Burada x yerine {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ve diğerleri yerine {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinin her elemanı yazılabileceğinden 9.10.10.10.10.10 = 900000 tane farklı ve "0" ile başlamayan telefon numarası verilebilir.

Örnek: n elemanlı bir kümenin tüm altkümelerinin sayısını bulalım.
Çözüm: Kümenin her elemanı için, altkümenin elemanı olması veya olmaması gibi iki farklı durum vardır. Dolayısıyla n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı; 2.2.2. … .2 = 2^n dir.

Örnek: 120 sayısının 1 ve kendisi dahil tüm pozitif bölenlerinin sayısını bulunuz.
Çözüm: $120 = 2^3.3^1.5^1$ dir. Bir A sayısı 120 nin böleni ise,
$A = 2^a.3^b.5^c$ formundadır. $a,b,c\in Z$ öyle ki; $0\le a\le 3,\ 0\le b\le 1,\ 0\le c\le 1$ dir. Buna göre 120 nin pozitif bölenlerinin sayısı (a,b,c) pozitif üçlülerinin sayısı kadardır. $a\in\{0, 1, 2, 3\}$, $b\in\{0,1\}$, $c\in\{0, 1\}$ olduğundan saymanın temel ilkesine göre, 4.2.2 = 16 tanedir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, \dots , 25\}$ olsun.
$T = \{(a,b,c) \mid a,b,c\in A\ ,a<b \text{ ve } a<c\}$ olsun. Buna göre bu şartları sağlayan T üçlülerinin sayısını, $|T|$ bulunuz.
Çözüm: $a=1, 2, \dots , 24$ olmak üzere, problemi a nın durumlarına göre inceleyelim: $a = t\in\{1, 2, \dots , 24\}$ iken seçilebilecek b ler ve c ler için 25-t farklı durum söz konusudur. Böylece istenen (t,b,c) üçlülerinin sayısı saymanın temel ilkesine göre $(25-t)^2$ dir. T değeri $1, 2, \dots , 24$ değerlerinden birini alabileceğinden toplama yoluyla sayma prensibine göre,
$|T| = 24^2+23^2+ \dots +2^2+1^2$ dir ve $1^2 +2^2 + \dots +n^2 = \dfrac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ formülünden $|T| = \dfrac{24.25.49}{6} =$ 4900 bulunur.

Örnek: $s(A) = n,\ s(B)= m\ (m\ge n)$ olmak üzere bir $f: A\rightarrow B$ fonksiyonu tanımlanıyor:
a) Kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir ?
b) Kaç farklı 1-1 fonksiyon tanımlanabilir ?
Çözüm: a) A kümesinin ilk elemanını B kümesinin m farklı elemanından biri ile eşleştirebiliriz. Fonksiyonun 1-1 kısıtlaması olmadığından 2. elemanı da m elemandan biri ile eşleştirebiliriz , … ; bu halde saymanın temel prensibine göre;
$m.m. \dots .m = m^n = s(B)^{s(A)}$ tane farklı fonksiyon tanımlanabilir.
b) Fonksiyonun 1-1 olması gerektiğinden;
1. eleman m eleman ile,
2. eleman m -1 eleman ile,
……
n. eleman $m - (n-1)$ eleman ile eşleşebilir.
O halde tanımlanabilecek fonksiyonların sayısı;
$m.(m-1).(m-2). \dots .(m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$ olarak bulunur.

Örnek: $s(A) = n$ olmak üzere bir A kümesi üzerinde tanımlanabilecek farklı,
a) Bağıntı sayısı,
b) Yansıyan bağıntı sayısı,
c) Simetrik bağıntı sayısı,
d) Ters-simetrik bağıntı sayısı kaçtır?

Çözüm:
a) Tanımlanacak β bağıntısı $s(AxA) = s(A).s(A)=n^2$ kümesinin bir altkümesi olacaktır, dolayısıyla $2^{s(AxA)}$ tane farklı altküme dolayısıyla bağıntı tanımlanabilir.
b) Yansıyan bir bağıntı A kümesinin $\forall x$ elemanı için AxA kümesinden bir (x,x) elemanı bulunduracaktır. Dolayısıyla n^2 elemandan n tanesi mutlaka olacaktır, kalan $n^2-n = n.(n-1)$ eleman için ise 2 farklı durum söz konusudur (olmak ya da olmamak) saymanın temel ilkesine göre, $2^{n.(n-1)}$ tane yansıyan bağıntı tanımlanabilir.
c) Bir bağıntının simetrik olması için $x \neq y$ olmak üzere içerdiği her (x,y) elemanı için (y,x) elemanını da içermelidir. AxA nın n^2 elemanından (x,x) formunda olan n eleman için 2 durum söz konusudur (olmak ya da olmamak), kalan n^2-n elema-

nı ise her (x,y) yi (y,x) ile eşleştirmek üzere 2 şer 2 şer eşleştirirsek, oluşan $\frac{n.(n-1)}{2}$ grup için 4 farklı durum söz konusudur (iki elemanında olmaması, (x,y) nin olup (y,x) in olmaması, (x,y) nin olmayıp (y,x) in olması ve iki elemanın birden olması). Ancak sadece bir elemanın bulunmasını öngören 2 durum simetriyi bozacağından sadece diğer 2 durum göz önüne alınmalıdır. Bu durumda tanımlanabilecek simetrik bağıntı sayısı: $2^{n}.2^{n.(n-1)/2} = 2^{n.(n+1)/2}$ tanedir.

d) Ters-simetri durumunda ise (x,x) formundaki elemanlar için yine 2 ve $\frac{n.(n-1)}{2}$ grup için yine 4 durum söz konusudur. Ancak bu 4 durumdan 2 elemanın birden bulunması ters-simetriyi bozduğundan diğer 3 durum göz önüne alınacaktır. Bu halde tanımlanabilecek ters-simetrik bağıntı sayısı;

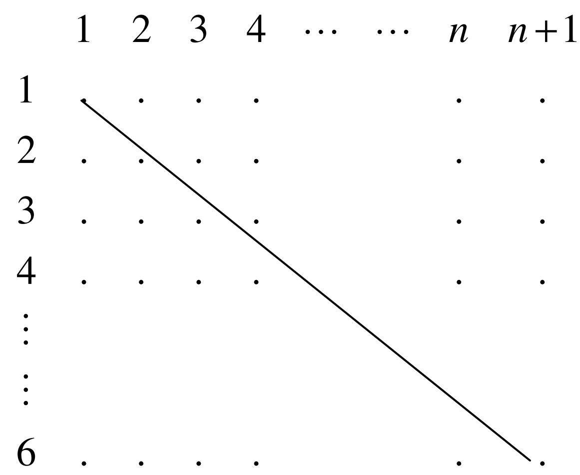
$2.2. \ldots .2.3.3. \ldots .3 = 2^{n}.3^{n.(n-1)/2}$ tane olarak bulunur.

SAYMA PROBLEMLERİNİN DAHA İYİ ANLAŞILMASI İÇİN FARKLI BİR ÖRNEK

Bu bölümde sayma prensiplerinin daha iyi anlaşılması için 3 sayma şeklini de kullanarak;

$1+2+3+...+n = \frac{n.(n+1)}{2}$ formülünü ispatlayacağız.

n satır halinde dizilmiş ve her satırda n+1 tanesi bulunan noktalar kümesini göz önüne alalım. n satırı *1, 2, 3, … , n* doğal sayılarıyla ve n+1 sütunu da *1, 2, 3, … , n+1* doğal sayılarıyla eşleştirelim ve her bir satıra gelen sayıyı soluna ve her bir sütundakini de yukarısına yazalım. Bu eşleştirme yoluyla saymanın bir uygulamasıdır.



Şimdi de görüldüğü gibi nokta düzlemimizi iki kısma ayıran bir doğru çizelim. Doğrunun altındaki kısmın,

1. satırında 1 nokta,
2. satırında 2 nokta,
3. satırında 3 nokta,

…………………. ,

n. satırında n nokta olduğunu görürüz. Herhangi 2 satırın ortak noktası olmadığı için toplama yoluyla sayma metodu doğrunun altında 1 + 2 + 3 + … + n noktanın bulunduğunu gerçekler. Buna s diyelim. Böylece,

s = 1 + 2 + 3 + … + n olur.

Şimdi doğrunun üzerindeki noktaların sayısına bakalım.

2. sütunda 1 nokta,
3. sütunda 2 nokta,
4. sütunda 3 nokta,

…………………. ,

n+1. sütunda n nokta bulunduğunu görürüz. Bu nedenle köşegenin üst tarafında yine s tane nokta vardır.

Toplama yoluyla sayma ilkesini burada uygularsak toplam nokta sayısını s + s = 2s olarak buluruz.

Öte yandan çarpma yoluyla sayma metodunu tüm noktaların sayısı için uygularsak, bu sayının satır sayısı ile sütun sayısının çarpımı olduğunu görürüz. Bu iki sonucu birleştirirsek;

$$2s = n.(n+1)$$

$$s = \frac{n.(n+1)}{2} \quad \text{veya}$$

$1+2+3+...+n=\frac{n.(n+1)}{2}$ elde ederiz.

FAKTÖRİYEL

Tanım: 1'den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına "n faktöriyel" denir ve "n!" şeklinde gösterilir.

$n \in N^+$ olmak üzere;

n! = 1.2.3. ….n dir.

Bu eşitlik şu şekillerde yazılırsa sadeleştirme daha kolay yapılır;

n! = n.(n-1).(n-2). … .3.2.1 veya
n! = n.(n-1)! veya
n! = n.(n-1).(n-2)! olur.

Özel olarak, 0! = 1 ve 1! = 1 olarak tanımlanmıştır.

Örnek: *n bir doğal sayı olmak üzere aşağıdakilerin her birini sadeleştiriniz.*

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$ b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ c) $\frac{n[n!-(n-2)!]}{[(n-2)!-n!]}$

Çözüm:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n.(n-1)!}{(n-1)!}=n$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1).n.(n-1)!}{(n-1)!}=(n+1).n=n^2+n$

c) $\frac{n[n!-(n-2)!]}{[(n-2)!-n!]}=\frac{n[n!-(n-2)!]}{(-1).[n!-(n-2)!]}=\frac{n}{-1}=-n$

Örnek: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}-\frac{(n-1)!}{(n-2)!}=50$ *olduğuna göre n kaçtır?*

Çözüm: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}-\frac{(n-1)!}{(n-2)!}=50$

$$\frac{(n+1).n.(n-1)!}{(n-1)!}-\frac{(n-1).(n-2)!}{(n-2)!}=50$$

$n^2+n-n+1 = 50$
$n^2 = 49$
n = 7

Örnek: $\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{n^2+8}{(n+1)!}$ ise n kaçtır?

Çözüm: Payda eşitlenirse,

$$\frac{(n-1).n.(n+1)}{(n-2)!(n-1).n.(n+1)}+\frac{n.(n+1)}{(n-1)!n.(n+1)}=\frac{n^2+8}{(n+1)!}$$

$n.(n+1).[(n-1)+1] = n^2+8$
$n^3 = 8$
n = 2

Örnek: *3.4!(n-2).(n-3). … .3.2.1 = n! ise n kaçtır?*

Çözüm:

3.24.(n-2)! = n.(n-1).(n-2)!
72 = n.(n-1)
9.8 = n.(n-1)
n = 9

Örnek: *$n,x \in N^+$ olmak üzere;*

$50! = 3^n$. x eşitliğini sağlayan en büyük n değeri kaçtır?

Çözüm: 50! sayısının asal çarpanlarına ayrıldığında verdiği 3 ün kuvvetini bulmak için 1 den 50 ye kadar olan sayıları 3'e, 9'a ve 27'ye bölmek gerekir. Bunu 50 yi ardı ardına 3'e bölerek de yapabiliriz.

50 | 3
48 | 16
2

16 | 3
15 | 5
1

5 | 3
3 | 1
2

O halde, $n=16+5+1 = 22$ olur

Örnek*:* *90! Sayısının sonunda kaç tane sıfır vardır?*

Çözüm*:* n, m ve x sayma sayıları olmak üzere, $90! = 5^m.2^n.x$ eşitliğinde $n>m$ olacağından $90! = 10^m.2^{n-m}.x$ şeklinde düzenlenirse 90! in sonundaki 0 sayısının m olduğun görülür. Bir önceki örnekteki metotla;

$$\begin{array}{r|l} 90 & 5 \\ \cline{2-2} 90 & 18 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 5 \\ \cline{2-2} 15 & 3 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$m = 18+3 = 21$ dir.

Örnek*:* $\frac{44!}{4^x}$ *kesrini tamsayı yapan en büyük x doğal sayısı kaçtır?*

Çözüm*:* $\frac{44!}{4^x} = k \quad (k \in Z^+)$

$44! = 4^x.k$

$44! = 2^{2x}.k$

Önceki 2 soruda uygulanan yöntemle 44! in içinde 41 tane 2 çarpanı olduğu görülür. 2x bir çift tamsayı olduğundan en çok 40 olabilir.

$2x = 40$

$x = 20$ olur.

Örnek*:* *1!+2!+3!+…+1996! sayısının birler basamağındaki rakam nedir?*

Çözüm*:* Verilen bir sayının onlar basamağındaki rakam sayının 10 ile bölümünden kalandır.

$1!+2!+3!+\ldots+1996! \equiv x \pmod{10}$

$5!+6!+\ldots+1996! \equiv 0 \pmod{10}$ olduğundan

$1!+2!+3!+4! \equiv x \pmod{10}$

$33 \equiv x \pmod{10}$

$3 \equiv x \pmod{10}$ bulunur.

Örnek*:* *$(1!+3!+5!+\ldots+99!)^{99!}$ Sayısının 5 ile bölümünden kalan kaçtır?*

Çözüm:

$(1!+3!+5!+\ldots+99!)^{99!} \equiv x \pmod 5$

Burada $5!+7!+\ldots+99! \equiv 0 \pmod 5$ olduğundan

$(1!+3!)^{99!} \equiv x \pmod 5$

$2^{99!} \equiv x \pmod 5$, $\quad 2^4 \equiv x \pmod 5$ olduğundan

$2^{99!} = (2^4)^{99!/4} \equiv 1 \equiv x \pmod 5$ ise,

$x=1$ dir.

Örnek*:* *1.2.3. … .150 çarpımı ile oluşan 150! sayısının açılımında kaç tane rakam kullanılmıştır?*

Çözüm*:* -1 den 9 a kadar 9 tane rakam vardır.

-10 dan 99 a kadar 90 tane sayı dolayısıyla 90.2 = 180 tane rakam vardır.

-100 den 150 ye kadar 51 tane sayı dolayısıyla 51.3 = 153 tane rakam vardır.

O halde, toplam 9+180+153 = 342 tane rakam vardır.

Örnek*:* *1.1!+2.2!. … +99.99! sayısının sondan kaç basamağı 9 dur?*

Çözüm*:*

$1.1!+2.2!+ \ldots +99.99! = 1!.(2-1)+2!.(3-2)+ \ldots +99!.(100-1)$

$= 2!-1!+3!-2!+4!-3!+ \ldots +100!-99!$

$= 100!-1! = 100!-1$

İfadenin bu sade şeklinde kaç tane 9 olduğunu bulmak için 100! in sonunda kaç tane 0 olduğunu bulmak yeterlidir. Daha önceki sorularda kullandığımız ardı ardına bölme tekniği ile bunu 24 olarak hesaplarız. Yani 100! İn sonunda 24 tane sıfır vardır. Dolayısıyla 100!-1 in sonunda da 24 tane 9 vardır.

ALIŞTIRMALAR

1. Alıştırma*:* *3, 5, 6, 7, 9 rakamları kullanılarak 500 den büyük üç basamaklı ve (a) rakamları tekrar edebilen*

(b) rakamları tekrar etmeyen kaç farklı sayı yazılabilir?

(C:(a)100, (b)48)

2. Alıştırma: *Eğer demokratlardan biri cumhuriyetçilerden belli ikisiyle birlikte çalışmayı reddederse 5 demokrat ve 8 cumhuriyetçiden içinde bir demokrat ver bir cumhuriyetçi bulunan kaç kurul elde edilebilir?*
(C:38)

3.* Alıştırma*: *Bir eğlence partisinde beş erkek ve 8 kız bulunuyor. Eğer Canan ve Alev, Orhan ve Zeki ile dans etmek istemiyorlar ve Ahmet de Canan ve Ayşe ile dans etmek istemiyorsa kaç farklı şekilde dans edecek çift meydana getirilebilir?* **(C:34)**

PERMÜTASYON (SIRALAMA)

{a, b, c} kümesini A ile gösterelim. A nın elemanlarından meydana getirilebilen sıralı ikilileri incelersek iki tür ikili olduğunu görürüz: (i) terimleri aynı olan ikililer, (ii) aynı olmayan ikililer. (a,a) , (b,b) , (c,c) birinci tür ikililerdir; diğer ikililer de ikinci türdendirler. Birinci türden 3 tane – A nın her elemanı için bir tane – ve ikinci türden 6 veya 3^2-3 tane vardır.

	a	b	c
a	(a,a)	(a,b)	(a,c)
b	(b,a)	(b,b)	(b,c)
c	(c,a)	(c,b)	(c,c)

Genel olarak, n elemanlı bir küme verildiğinde, bileşenleri verilen kümenin elemanları olan sıralı ikililerden n^2 sayıda sıralı ikili elde edilebilir. Bu n^2 ikililerden n tanesinde (her bir eleman için bir tane) tekrarlama var. Böylece bileşenleri aynı olmayan ikililerin sayısının n^2-n olduğu anlaşılır.

Tanım*:* n elemanlı bir kümenin elemanlarından elde edilen ve bileşenlerinin hiç biri aynı olmayan sıralı m-lilere, *n elemanın m-li permütasyonları* veya kısaca, kümenin *m-li permütasyonları* denir. Şüphesiz, $m \leq n$ dir.

Bu nedenlerle n elemanlı bir kümenin 2-li permütasyonlarının sayısı n^2-n dir.

2. Tanım*:* n elemanlı bir kümenin n-li permütasyonlarına sadece,*kümenin permütasyonları* denir.

m = 2 için bu değeri bulmuştuk, şimdi m in daha büyük değerlerini ele alalım.

İlk olarak, yeniden ikililere dönelim. n satır ve n sütunlu bir tabloyu ele alalım. bileşenleri aynı olan ikililerden kurtulmak için her satırdan böyle ikiliyi atalım. *2-li permütasyonların* listesini değil, yalnız sayısını bulacağımız için, her satırın şurasından burasından bir ikili atacağımız yerde tablodan tüm bir sütun atarsak sayma prensibimize göre herhangi bir değişiklik olmaz. Sütunlarından biri çıkarılmış "daraltılmış" olan n satırlı ve n-1 sütunlu tabloda *n.(n-1)* tane ikili bulunur. Bu sayı, daha önce bulunan sayıyı, n^2-n yi doğrulamaktadır ve bu da ayırt edilmiş ikililer olarak bileşenleri tekrar etmeyen sıralı ikililerin teşkilini düşünürsek akla uygun gelmektedir. n elemanın herhangi birini, birinci bileşen ve kalan *n-1* elemanın herhangi birini de ikinci bileşen olarak seçmekte serbestiz. Daraltılmış tablomuzda *n.(n-1*) eleman olduğu için bu seçilmiş ikililerin *n.(n-1*) yoldan elde edildiğini söyleyebiliriz.

n elemanı olan bir kümenin *3-lü permütasyonuna* geçelim (yani bileşenleri aynı olmayan sıralı üçlüler). Bunun için sol yanında *2-li permütasyonların* listesi (bunlardan n.(n-1) tane var.) ve üst başında n elemanı bulunan bir tablo düşünelim.

	a	b	c
(a,b)			(a,b,c)
(a,c)		(a,c,b)	
(b,c)	(b,c,a)		
(b,a)			(b,a,c)
(c,a)		(c,a,b)	
(c,b)	(c,b,a)		

Bileşenleri aynı olan *3-lülerden* kurtulmak için n^2-n tane satırın her birinden 2 tane üçlü atacağız. Tabloda (n^2-n).n tane yer (satır sayısı ile sütun sa-

yısının çarpımı) ve her satırda iki boş yer olduğundan tablodaki üçlülerin sayısı,
$(n^2-n).n-2.(n^2-n)$ veya
$(n^2-n).n-2.(n^2-n)=n.(n-1).(n-2)$ dir.

İkililerde olduğu gibi, biz yalnız 3-lülerin sayısı ile ilgileniyoruz. Buradaki aynı sonucu, sadece, 2 sütunu çıkarıp *n.(n-1)* satır ve n-2 sütunu bırakarak bulabiliriz. Böyle yapınca, n elemanlı bir cümlenin *3-lü permütasyon* sayısının n.(n-1).(n-2) olduğunu başka bir yoldan da görmüş olduruz.

Aynı düşünceyi bileşenleri tekrarlamayan 4-lü, 5-li, m-lilere kadar götürecek olursak sırasıyla
$n.(n-1).(n-2).(n-3)$
$n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)$
……………………………………
$n.(n-1).(n-2).(n-3).....(n-(m-1))$
sayılarını elde ederiz.

n elemanlı bir kümenin m-li permütasyonlarının sayısını belirtmek için çok çeşitli değişik semboller kullanılır. Bunların en fazla kullanılanlarından bazıları $n^{(m)}, {}_nP_m, P_n^m, P(n,m)$ dir.

Biz P(n,m) i kullanacağız. Yukarıdaki sonuca göre n elemanlı bir kümenin *m-li permütasyonlarının sayısı*

$$P(n,m)=n.(n-1).(n-2).....(n-m+1)$$

ve eğer n = m ise,

$$P(n,n)=n.(n-1).(n-2).....(n-n+1)=n.(n-1).(n-2).....2.1$$

olur.

Bir önceki bölümde öğrendiğimiz *faktöriyel notasyonuyla* P(n,m) formülünü daha derli toplu ifade edebiliriz.

$$P(n,m)=n.(n-1).(n-2).....(n-m+1)$$

$$P(n,m)=n.(n-1).(n-2).....(n-m+1).\frac{(n-m).(n-m-1).....3.2.1}{(n-m).(n-m-1).....3.2.1}$$

$$P(n,m)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

0! in 1 e eşit olduğu düşünülerek ifadenin $n = m$ için de geçerli olduğu görülür:

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n! \text{ olur.}$$

Örnek: *On iki kişinin katıldığı bir yarışmada, her katılana birden fazla özdül verilmemek şartıyla, birinci ve ikinci ödüller kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*

Çözüm: Problemde, bileşenleri tekrar etmeyen ve birinci bileşeni birinci ödüllü, ikincisi ise ikinci ödüllü olan (bir yarışmacı, başka yarışmacı) şeklindeki ikililerin sayısı istenmektedir. Böyle ikililerin sayısı P(12,2) olup sonuç 12.11 veya 132 dir.

Örnek: *Dört ülkenin bir haritası, her ülke farklı renkte olacak şekilde altı çeşit boya varsa harita kaç farklı şekilde boyanabilir?*

Çözüm: Altı elemanı olan bir kümenin *4-lü permütasyonlarının* sayısını istiyoruz. Her dörtlü (birinci ülkenin rengi, ikinci ülkenin rengi, üçüncü ülkenin rengi, dördüncü ülkenin rengi) şeklindedir.
Cevap P(6,4) yani 6.5.4.3 veya 360 dır.

Örnek: *Yirmi öğrencisi bulunan bir sınıfta her gün değişik sıralı bir dizilişte dersaneden çıkılması kararlaştırılıyor. Sınıfın, bütün değişik sıralamalarda dersaneden çıkabilmesi kaç günde mümkündür?*

Çözüm: Cevap 20! günde. Bir yılda 365 gün çalışsalarda bu yaklaşık olarak 6,7 katrilyon yıl sürerdi. Eğer her saniyede değişik bir sırada kapıdan çıkabilseler bu süre 70 milyon yıldan fazla tutar.

3. Tanım: Sonlu bir kümenin elemanlarının, bir çemberin noktalarının üzerinde birbirine göre farklı dizilişlerinin her birine, bu elemanların bir *dönel sıralaması* denir.
Örnek: *Bir rulet tekerleğindeki sayılar kaç değişik şekilde düzenlenebilirler? (Rulette 38 tane sayı vardır; 00, 0, 1, 2, …, 36)*

Çözüm:… *{00, 0, 1, 2, … , 36}* nın 38-li bütün permütasyonlarını göz önüne alalım. Bunların sayısı *P(38,38) = 38!* dir. 38-li permütasyonlardan (a_1, a_2, … , a_{38}) gibi birine karşı getirilebilen 37 permütasyon mevcut olur:

$(a_2, a_3, \ldots, a_1)$

$(a_3, a_4, \ldots, a_2)$

……………...

$(a_{38}, a_1, \ldots, a_{37})$

Bunların hiçbiri teker üzerinde ayırt edilemez. Bu nedenle *{00, 0, 1, 2, … , 36}* kümesinin birbirinden ayırt edilebilir permütasyonlarının sayısı N ise,

$38.N = P(38,38) = 38!$

$N = 37!$

bulunur.

x_1 den başlamak üzere x_r tane eleman saat yönünde birer kayarsa, başlangıçtaki pozisyon elde edilir. Aynı şekilde her eleman r kadar kayma yapar ve ilk durum elde edilir. Dolayısıyla, normal dizilişin $\frac{1}{r}$ si kadar az sıralama olur.

Genel olarak n elemanlı bir kümenin dairesel permütasyonlarının sayısı (n-1)! dir.

Eğer dönel permütasyonla ilgili sorular bir masa etrafında oturmak gibi sabit bir halka üzerinde değilde bir bilezik veya anahtarlık üzerindeki diziliş gibi ise, bileziğin 180^0 döndürülmesi sonucu oluşacak durum aynı kabul edilmelidir. Dolayısıyla farklı permütasyonların sayısı $\frac{(n-1)!}{2}$ olur.

Örnek: *1, 2, 3, 4 rakamlarıyla yazılabilen, rakamları tekrarsız dört rakamlı sayıların toplamı nedir?*

Çözüm:… 4 rakamla 4! = 24 sayı yazabiliriz. Bunları toplarsak 1, 2, 3, 4 rakamları her basamakta $\frac{24}{4} = 6$ kez tekrar eder. Bu yüzden *6.(1 + 2 + 3 + 4)=60* dır. Rakamların basamak değerlerini dikkate alırsak, *60.1000 + 60.100 + 60.10 + 60.1 = 66660* bulunur.

Örnek: *a_i ler ($1 \le i \le 9$, $i \in N$) rakam yani $a_i \in$ {1, 2, 3, …, 9} olmak üzere, $a_1a_2 \ldots a_n$ formunda yazılabilecek, rakamları tekrarsız sayıların toplamının* $\underbrace{(11111....1)}_{n-basmakalı}$*.(a_1 + a_2 + … + a_n).* $\frac{n!}{n}$ *olduğunu göstriniz.*

Çözüm: Bu rakamlarla n! Tane sayı yazabiliriz. Her bir rakam her basamakta $\frac{n!}{n}$ kez tekrar eder. Yazılan bu sayıların toplamı ise,

$$10^{n-1}.\frac{n!}{n}.(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 10^{n-2}.\frac{n!}{n}.(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \ldots +$$

$$= (10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1).\frac{n!}{n}.(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

$$= \underbrace{(111\ldots1)}_{n\text{ -basamaklı}}.(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).\frac{n!}{n}$$

Örnek: *A, H, M, E, T harfleriyle yazılabilecek, alfabetik sıraya göre 120 farklı kelimeden,*

a) 99. kelime nedir?

b) AHMET kelimesi kaçıncı sıradadır?

Çözüm:

a) Bu beş harfle 120 kelime yazıldığını biliyoruz. Her bir harf $\frac{120}{5} = 24$ kez tekrar eder.

A ile başlayan 4!=24 kelime,
E ile başlayan 4!=24 kelime,
H ile başlayan 4!=24 kelime,
M ile başlayan 4!=24 kelime,
TAEHM kelimesi 97. kelimedir.
TAEMH kelimesi 98. kelimedir.
TAHEM kelimesi 99. kelimedir.

b) *AEHMT* 1. kelimedir.
AHEMT 7. kelimedir.
AHETM 8. kelimedir.
AHMET 9. kelimedir.

Örnek: *Herhangi 2 öğretmen arasına 1 öğrenci olmak şartıyla 4 öğretmen ile 4 öğrenci yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?*

Çözüm: Önce öğretmenler yuvarlak masa etrafına (4-1)! = 3! = 6 farklı şekilde oturabilirler. Öğrenciler de öğretmenlerin arasında kalan 4 yere 4! değişik şekilde oturabilirler. Sonuç olarak 3!.4! = 144 tür.

Örnek: *n tane evli çift yuvarlak masa etrafında, her çift birlikte olmak şartıyla kaç farklı şekilde sıralanabilir?*

Çözüm: n tane evli çift 2n tane kişi demektir. Her bir evli çift birbirinden ayrılmayacağından n kişi gibi düşünülür. N tane kişi yuvarlak masa etrafına (n-1)! Farklı şekilde yerleşir. Her çift kendi arasında 2! Farklı şekilde yerleşeceğinden cevap $(2!)^n.(n-1)!$ olur.

Örnek: 20 soruluk bir sınavda; her sorunun 4 yanlış ve bir doğru olmak üzere 5 seçeneği vardır. Bu sınavın cevap anahtarı hazırlanacaktır.

a) Kaç farklı cevap anahtarı oluşturulabilir?
b) Doğru cevap ard arda 2 soruda aynı şık olmayacak şekilde kaç farklı cevap anahtarı hazırlanabilir?

Çözüm:…

a) $5.5.5. \dots .5 = 5^{20}$
b) $5.4.4. \dots .4 = 5.4^{19}$

Örnek: *{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9} kümesinin dörtlü permütasyonlarının kaç tanesinde 2 elemanı bulunur?*

Çözüm: Bütün 4-lü permütasyonlar P(7,4) = 7.6.5.4 = 840 dır. 2 nin bulunmadığı 2 li permütasyonlar ise, P(6,4) = 6.5.4.3 = 360 dır. O halde bizden istenen
P(7,4) – P(6,4) = 840 – 360 = 480 dir.

Örnek: *A ve B, n kişilik bir grupta iki öğrencidir. n öğrenci yan yana doğrusal şekildeki birer kişilik odalara yerleştirilecektir.*

a) A ve B komşu odalara yerleştirilecekse,
b) *A ve B komşu odalara yerleştirilmeyeceklerse kaç farklı şekilde işlem yapılabilir?*

Çözüm:

a) Komşu odaları n-1 farklı şekilde seçebiliriz ve 2 yolla A ve B yi bu odalara yerleştiririz. O halde, 2.(n-1) şekilde A ve B yerleşir. Geri kalan n-2 öğrenci kalan n-2 odaya (n-2)! Şekilde yerleştirilir. Toplam yerleştirme sayısı ise, *2.(n-1).(n-2)! = 2.(n-1)! dir.*
b) n! – 2.(n-1)! = (n-2).(n-1)!

n farklı elemandan 2 si yan yana gelmeme koşulu ile (n-1)!.2! kadar bir dizide sıralanabilirler. Birbirinden farklı n elemandan belli r tanesi yan yana gelmeme koşuluyla bir dizide r!.(n-r+1)! farklı şekilde dizilebilirler. Yan yana gelmeme koşuluyla ise *n!-r!.(n-r+1)!* kadar farklı diziliş vardır.

ALIŞTIRMALAR

***1.* Alıştırma:** *Özel üçü yan yana olmak şartıyla 8 değişik kitap bir kitaplığın rafına kaç değişik biçimde dizilir?*
(C:720)

***2.* Alıştırma:** *"YÖNETİM" kelimesindeki her harfi bir kez kullanarak anlamlı ya da anlamsız YÖN ile başlayan yedi harfli kaç kelime yazılabilir?*
(C:24)

***3.* Alıştırma:** *Y, A, S, İ, N harflerinin 5-li permütasyonlarından oluşan kelimeler alfabetik sıraya diziliyor.*
a) 99. kelime nedir?
(C: YANİS)

b) İSYAN kelimesi kaçıncı sırada bulunur?
(C: 40)

***4.* Alıştırma*:* *{1, 2, 3, 4, 5} rakamları kullanılarak yazılabilen 5 rakamlı, tekrarsız, sayılar küçükten büyüğe doğru sıralanıyor.*

a) 84. sayı kaçtır?
(C: 42531)

b) *43251 kaçıncı sıradadır?*
(C: 88)

***5.* Alıştırma*:* *n tane kız ve n tane erkekten oluşan bir grup, iki kız arasında bir erkek olacak şekilde dairesel bir pist etrafındaki 2n sayıdaki sandalyelere oturacaklardır. Kaç farklı şekilde otururlar?*
(C: $2.(n!)^2$)

***6.* Alıştırma*:* *{1, 2, 3, 4, 5} rakamları kullanılarak yazılabilen,*
a) 3 basamaklı sayıların toplamı kaçtır?
(C: 41625)

b) *rakamları tekrarsız 3 basamaklı sayıların toplamı kaçtır?*
(C: 19980)

***7.* Alıştırma*:* *3 farklı matematik, 4 farklı fizik ve 5 farklı kimya kitabı bir rafa hepsi birden dizilecektir.*

a) *Kaç farklı şekilde dizilebilirler?*
(C: 12!)

b) *Aynı branş kitaplar yan yana olacaksa, kaç farklı şekilde dizilebilirler?*
(C: 3!.3!.4!.5!)

c) *Fizik kitapları yan yana olacaksa, kaç farklı şekilde dizilebilirler?*
(C: 9!.4!)

d) *Sıralama bir matematik kitabı ile başlayıp bir matematik kitabı ile bitecek şekilde kaç farklı şekilde dizilebilirler?*
(C: 6.10!)

***8.* Alıştırma*:* *4 telefon hattı bulunan bir okulda bir sekreter her aramasını üst üste aynı hattan yapmamak şartıyla 4 aramayı ard arda kaç farklı şekilde gerçekleştirebilir?*
(C: 108)

***9.* Alıştırma:** *4 öğrenci ve 2 sporcu birlikte fotoğraf çektireceklerdir. Sporcular yan yana olacak şekilde üç kişi arka, üç kişi ön sırada duracak şekilde kaç değişik poz verebilirler?*
(C: 192)

***10.* Alıştırma*:* *5 farklı oyuncak 4 çocuğa kaç farklı şekilde dağıtılır?*
(C: 4^5)

***11.* Alıştırma:** *4 ü kız, 5 i erkek 9 öğrenci, herhangi 2 erkek öğrenci yan yana gelmemek şartıyla, kaç farklı şekilde yan yana oturabilirler?*
(C: 5!.4!)

***12.* Alıştırma*:* *Altı tane boş yeri olan bir havayolları otobüsünde dört kişi kaç değişik şekilde oturabilir?*
(C: 360)

***13.* Alıştırma*:* *Bir anahtar üzerinde yükseklikleri değişik yirmi çeşit diş kullanan bir kilit fabrikası bir anahtar üzerinde değişik üç diş kullanmak suretiyle farklı kaç çeşit kilit imal edebilir?*
(C: 6840)

***14.* Alıştırma*:* *a, b, c, d, e, f harfleri, ab başta olmak ve hiçbiri tekrar kullanılmamak üzere kaç farklı şekilde dizilebilir?*
(C: 24)

***15.* Alıştırma*:* 1*, 2, 3, 4, 5 rakamlarıyla 3 rakamı ortada olmak ve hiçbiri aynı sayıda iki defa kullanılmamak şartıyla üç basamaklı kaç sayı yazılabilir?*
(C: 12)

***16.* Alıştırma*: A, B, C, D, E, F, G harflerinin, içinde C bulunan 5-li permütasyonlarının sayısı nedir?*
(C: 360)

***17.* Alıştırma:** *Her ilin motorlu araç plakalarında il numarasından sonra iki harf ve üç basamaklı bir sayı bulunmaktadır. Alfabemizdeki yirmi dokuz harfin hepsini ve sıfırı herhangi bir basamakta kullanılabilmek şartıyla yukarıda açıklanan türdeki plakalardan bir il için kaç tane yapılabilir?*
(C: $29^2.10^3$)

***18.* Alıştırma*: Bir grup öğrencinin bir doğru boyunca çeşitli dizilişlerinin sayısı yuvarlak bir masa etrafındaki çeşitli dizilişlerinin 6 katıdır. Öğrencilerin sayısı nedir?*
(C: 6)

***19.* Alıştırma:** *Fatih Sultan Mehmet 8 kumandanını otağındaki yuvarlak masa etrafında topluyor. Masa etrafında sultana ait bir taht ve 8 oturma yeri bulunduğuna göre kumandanlar toplantıda kaç farklı şekilde oturabilirler?*
(C: 8!)

***20.* Alıştırma*: Aşağıdakilerin her birini ispat ediniz. (n,m $\in N$)*

$a) P(n,3)+3.P(n,2)+P(n,1)=n^3$

$b) (n+1).[n.n!+(2n-1)(n-1)!+(n-1)(n-2)!]=(n+2)!$

$(2\le n)$

$c) P(n+1,m)=(n+1)P(n,m-1)$

$m\le n+1$

$d) P(n,m)=m.P(n-1,m-1)+P(n-1,m)$

$m\le n$

$e) P(n,m)=P(n-2,m)+2m.P(n-2,m-1)+m(m-1).P(n-2,m-2)$

$m\le n-2$

KOMBİNEZON(SEÇME)

Bu kesimde aşağıdaki sayma problemlerini ele alacağız:

i.) *n elemanlı sonlu bir kümenin kaç alt kümesi vardır?*

ii.) *n elamanlı sonlu bir kümenin, 1 elemanlı, 2 elemanlı, 3 elemanlı, … , m elemanlı kaç alt kümesi vardır? ($m\le n$)*

Önce kolay olan *(i)* problemini ele alacağız. Kümemizin şu elemanlardan meydana geldiğini farzedelim: $a_1, a_2, \dots, a_n$

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ in değişik alt kümeleri, bütün elemanları teker teker yoklayarak her birini almak veya bırakmak suretiyle elde edilir. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ nin alt cümlelerini elde etmenin yolunu, bileşenli *A* (“al” anlamında) veya *B* (“bırak” anlamında) olan bir sıralı n-li yi yazarak açıklayabiliriz.

Örneğin, *n = 4* elemanlı $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ kümesinden *(A, A, B, B)* dörtlüsü yardımıyla $\{a_1, a_2\}$ alt kümesini şöyle elde ederiz:

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$(A,\ A, B, B\ )$

$\{a_1, a_2, \qquad \}$

Böylece her alt küme, aşağıdaki şema ile gösterilene benzer “kuruluş listesi” yardımıyla tanımlanmıştır. $\{a_3, a_4\}$ alt kümesi verilmiş ise bu, şu yoldan elde edilmiştir:

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$\{\qquad a_3, a_4\}$

$(B,\ B,\ A,\ A)$

Her alt küme, böyle sıralı n-lilerden yalnız biri ile eşlendiği için $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ kümesinin alt kümelerinin sayısı, *{A, B}* kümesinin elemanlarından teşkil edilebilen sıralı n-lilerin sayısına eşit olur. Böyle sıralı n-lilerin sayısının 2^n olduğunu önceki bölümlerde göstermiştik.

Teorem*: n elemanlı sonlu bir kümenin 2^n alt kümesi vardır. (Bu teoremin ispatını ilk bölümdeki örnekler arasında görmüştük.)*

Özellikle iki alt kümenin sayılmış olduğuna dikkat ediniz. Bütün bileşenleri *A ve bütün bileşenleri B* olan 2 özel n-li vardır. Bunlardan birincisiyle eşlenen alt küme, verilen kümenin ta kendisidir; ikincisiyle eşlenen alt küme ise, verilen kümenin hiçbir elemanı olmadığı için boş kümedir.

Örnek: *100 senatörden meydana getirilebilecek bütün komisyonların toplam sayısı* $2^{100}-1$ *dir, bu sayıya bütün senatörlerin meydana getirdiği komisyon katılmış fakat üyesi olmayan komisyon katılmamıştır. Bu sayı,* 1267650600228229401496703205375 *dir.*

Şimdi problem *(ii)* yi ele alalım: n elemanlı sonlu bir kümenin, m elemanlı kaç alt jkümesi vardır? Burada m sayısı n den büyük olmayan bir doğal sayıdır. m elemanlı bir alt kümeye çok zaman *n elemanın m-li kombinezonu* denir.

Bazı örneklere bakalım. Üç eleman ile verilen $\{a,b,c\}$ kümesinin boş olmayan alt kümeleri şunlardır:

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$

$\{a,b,c\}$

Bu örnek oldukça basitse de genel bir soru için bize iyi bir fikir vermektedir. Böylece, n elemanlı bir kümenin 1 elemanlı n alt kümesi vardır.(alt küme içinde bir tane olan her bir elemana böyle bir alt küme karşılık gelemektedir.) n elemanlı bir kümenin n-1 elemanlı n alt kümesi vardır. (alt küme içinde olmayan her elemana böyle bir alt küme karşılık gelmektedir.) Şüphesiz, n elemanlı bir kümenin n elemanlı bir alt kümesi vardır, o da kümenin kendisidir.

n elemanlı bir kümenin m elemanlı alt kümelerinin sayısını göstermek için çok farklı yollar vardır. bunlardan bazıları ${}_nC_m, C_n^m, C(n,m)$ dir. Biz en sondakini kullanacağız.

Az önce öğrendiklerimizden dolayı $C(n,1)=n$, $C(n,n-1)=n$, $C(n,n)=1$ dir.

Şimdi de $\{a,b,c,d\}$ kümesinin alt kümelerini ele alalım. Burada n=4 tür. $C(4,1)$, $C(4,3)$, $C(4,4)$ leri biliyoruz. Yalnız $C(4,2)$ yi belirtmemiz yeter.aşağıdaki şema $\{a,b,c,d\}$ kümesinin 2-li alt kümelerini açıkça göstermektedir:

$$\{\ a\ ,\quad b\ ,\quad c\ ,\quad d\ \}$$

$$\begin{array}{llll}
\{a, & b\} & & \\
\{a, & & c\} & \\
\{a, & & & d\} \\
 & \{b, & c\} & \\
 & \{b, & & d\} \\
 & & \{c, & d\}
\end{array}$$

Altı tane var. Böylece $C(4,2)=6$.

$\{a,b,c,d\}$ kümesinin elemanlarından meydana getirilen ve aşağıdaki tabloda görülen sıralı ikilileri, en son listemizle karşılaştırırsak bir önceki kısımda ele aldığımız permütasyon problemleri ile incelemekte olduğumuz problem arasındaki bir bağıntıyı keşfedebiliriz.

	a	b	c	d
a	(a,a)	(a,b)	(a,c)	(a,d)
b	(b,a)	(b,b)	(b,c)	(b,d)
c	(c,a)	(c,b)	(c,c)	(c,d)
d	(d,a)	(d,b)	(d,c)	(d,d)

$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$ alt kümeleri tablonun sağ üst köşesinde görülen

$$\begin{array}{lll}
(a,b) & (a,c) & (a,d) \\
 & (b,c) & (b,d) \\
 & & (c,d)
\end{array}$$

ikilileriyle temsil edebiliriz. Aynı şekilde tablonun sol alt köşesindeki ikililerle de temsil edilebilir:

$$\begin{array}{lll}
(b,a) & & \\
(c,a) & (c,b) & \\
(d,a) & (d,b) & (d,c)
\end{array}$$

Bu ikilileri aşağıda görüldüğü gibi alt kümelerle karşılaştıralım:

$\{a,b\}$: (a,b) , (b,a)
$\{a,c\}$: (a,c) , (c,a)
$\{a,d\}$: (a,d) , (d,a)
$\{b,c\}$: (b,c) , (c,b)
$\{b,d\}$: (b,d) , (d,b)
$\{c,d\}$: (c,d) , (d,c)

Bu sıralanışları incelersek, çizginin sağındaki her sıralı ikilinin, aynı satırda ve sıranın solundaki bir 2-li permütasyonu olduğunu görürüz. Böyle 2 elemanlı her bir alt küme için $P(2,2)$ sayıda 2-li permütasyon vardır. Böylece $P(2,2)$ sayısı, çizginin sağındaki sütun sayısıdır. $C(4,2)$ ise satır sayısını göstermektedir. a, b, c, d den elde edilen 2-li permütasyonların toplam sayısı $P(4,2)$ olduğu için,
$C(4,2).P(2,2)=P(4,2)$ yazar ve buradan da
$C(4,2)=\dfrac{P(4,2)}{P(2,2)}=\dfrac{4.3}{2.1}=6$ elde ederiz.

Şimdi de n elemanlı bir kümeyi göz önüne alalım. m elemanlı alt kümelerin sayısı (bilinmiyor) $C(n,m)$ ile gösterelim. Her bir satırı bu m elemanlı alt cümlelerle belirtilen bir tablo düşünelim. Bu tablonun her satırına o satırı belirten alt cümlenin $P(m,m)$ tane m-li permütasyonlarını yazarız. Bu tablonun içindekilerin toplam sayısı, verilen kümenin m elemanlı bütün permütasyonlarının $P(n,m)$ sayısına eşittir. Satır ve sütun sayılarını çarparak
$C(n,m).P(m,m)=P(n,m)$
veya

$$C(n,m)=\frac{P(n,m)}{P(m,m)}=\frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!}=\frac{n!}{m!.(n-m)!}$$

elde ederiz.

NOT: *Vereceğimiz çözümlü örnekler ve alıştırmaların bir kısmı ilerleyen konularda daha detaylı olarak işlenecektir ancak buraya kadar olan bilgilerimiz ile çözülebilecekleri için bunları şimdi de veriyoruz.*

Örnek: *52 lik bir deste iskambil kağıdından kaç türlü iki kağıt çekilebilir?*
Çözüm: 52 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümlerinin sayısını istiyoruz.

$$C(52,2)=\frac{52!}{2!.(52-2)!}=\frac{52.52!}{1.2}=26.51=1326$$

Örnek: *52 lik bir deste iskambil kağıdından, içinde maça ası olan kaç tane 5 kartlı el elde edilebilir?*

Çözüm:
$C(51,4)=\dfrac{51!}{4!.47!}=\dfrac{51.50.49.48}{4.3.2.1}=249900$ olur.

Örnek: $C(n,m)=C(n,n-m)$ *olduğunu gösteriniz ve bu formülü, verilen bir kümenin alt kümeleri cinsinden yorumlayınız.*

Çözüm:

$$C(n,n-m)=\frac{n!}{(n-m)!.(n-(n-m))!}=\frac{n!}{(n-m)!.m!}=C(n,m)$$

.
$C(n,m)$, n elemanlı bir kümenin m elemanlı alt kümelerinin sayısıdır. Bu alt kümelerin her biri aynı kümenin (n-m) elemanlı alt kümeleriyle eşlenebilir; yani, bir alt küme ile bu alt kümenin elemanlarından hiçbirini kapsamayan alt küme eşlenebilir. Bu eşleme verilen bir kümenin m elemanlı alt kümeleriyle, (n-m) elemanlı alt kümelerinin aynı sayıda olduğunu bu formül yardımıyla kesin olarak göstermektedir.

Örnek*: Herhangi bir n doğal sayısı m tane doğal sayının toplamı olarak kaç değişik şekilde yazılabilir? Burada toplamın değişik yazılması, toplamdaki terimlerin sırasının farklı olması anlamında alınmıştır. (* $m\neq 0$ *)*

Çözüm: Önce n=5, m=3 özel durumuna bakalım. Bir sırada bulunan 5 "çentik"i göz önünde tutalım.
| | | | |
Problemimiz bu çentikleri 3 gruba ayırmaya denk olur. Böylece
| , | | , | |
bize
$1+2+2$
ve

| , | | | , |
de
$1+3+1$
çözümünü verir. Çentikleri üç gruba ayırmak, ardışık çentiklerin arasındaki dört aradan ikisini seçmekle mümkün olur. Bu da $C(4,2)$ veya 6 yoldan yapılabilir.

Genel durumda n çentik ve n-1 ara bulunsun:
Her n doğal sayısının m terimin toplamı olarak gösterilmesi, n-1 aralığın kümesinin m-1 elemanlı bir alt kümenin ayrılmasına karşılık tutulabilir. Bu nedenle sorunun cevabı $C(n-1,m-1)$ sayısıdır.

Örnek: *Bir dershane de 20 öğrenci, 2 kapı ve 3 pencere bulunuyor. Bir yangın halinde, her çıkış yerinden en az bir kimse çıkmak şartıyla öğretmen ve öğrenciler kaç değişik şekilde dershaneyi boşaltabilirler?*

Çözüm: Temel eşitlik prensibini 21 canlının hepsine uygulayacağımız için her insan kendi başına hareket edecektir. 21 doğal sayısı 5 doğal sayının toplamı olarak (her bir çıkış yeri bir terim olarak düşünülüyor.) $C(21-1,5-1)$ çeşitli şekilde yazılabilir; bura terimlerin yerlerinin farklı olması, yazılışın farklı olması anlamına gelmektedir.
$C(21-1,5-1)=C(20,4)=4845$ olur. (Cevabın büyüklüğü, ileride çok çeşitli acele kararların verilmesini önlemek ve bir düzen sağlamak için bir çıkış planının yapılması gerektiğini ortaya koyuyor.)

Örnek*: İçinde tam 5 maça bulunan 13 kartlı kaç briç eli vardır?*

Çözüm: 5 maçanın kümesini A ile ve içinde maça bulunmayan diğer 8 kartın kümesini B il gösterirsek, (A,B) sıralı ikililerinin sayısı sorunun cevabı olur. A için $C(13,5)$ ve B için $C(39,8)$ ihtimal vardır. Böylece aranan sayı $C(13,5).C(39,8)=7,92.10^{11}$ dir.

Örnek: *Birbirine paralel farklı 7 doğru ve birbirine paralel farklı 5 doğrudan her biri kesiştiriliyor. Kaç tane paralelkenar oluşur?*

Çözüm:… Birbirine paralel farklı 7 doğrudan herhangi ikisi, birbirine paralel farklı 5 doğrudan herhangi ikisi ile kesiştiğinde bir paralelkenar elde edilir.
Birbirine paralel 7 doğrudan herhangi ikisi $C(7,2)$ değişik biçimde, birbirine paralel farklı 5 doğrudan herhangi ikisi $C(5,2)$ farklı değişik biçimde seçilebilir. Saymanın temel ilkesine göre aranan paralelkenarların sayısı $C(7,2).C(5,2)=21.10=210$ olur.

Örnek: *n kenarlı bir dışbükey çokgenin köşegen sayısını hesaplayınız.*

Çözüm: Köşegen karşılıklı 2 köşeyi birleştiren doğru parçasıdır. Herhangi iki köşe P ve Q olsun. [PQ] köşegeni ile [QP] köşegeni aynı olduğundan sıra önemli değildir. Öyleyse n köşeden seçilecek 2-li alt kümelerin (n in 2-li kombinezonlarının)sayısı içinde köşegen ve kenar sayısını bulunduracaktır. Bu nedenle $C(n,2)-n$ değeri köşegen sayısını verir. Bu sayıda

$$\mathrm{C}(n,2)-n=\frac{n!}{2!.(n-2)!}-n=\frac{n.(n-1)}{2}-n=\frac{n.(n-1)-2n}{2}$$
$$=\frac{n^2-n-2n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

olur.

Örnek: $K=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *kümesinin birbirinden farklı 5 elemanını kullanarak, rakamlarının herhangi üçü tek sayı ve herhangi ikisi çift sayı olan birbirinden ferklı kaç tane beş basamaklı sayı yazılabilir?*

Çözüm:… K kümesinin tek sayı olan elemanlarının oluşturduğu küme $A=\{1,3,5,7,9\}$, çift sayı olan elemanlarının oluşturduğu küme $B=\{2,4,6,8\}$ dır. A dan 3, B den 2 eleman alarak birbirinden farklı kaç tane 5 basamaklı sayı yazılabileceğini bulmak istiyoruz.

A kümesinden 3 eleman $C(5,3)$ türlü, B kümesinden 2 eleman $C(4,2)$ türlü seçilebileceğinden istenilen sayının yazılmasında kullanılacak 5 rakam birbirinden farklı $C(5,3).C(4,2)=60$ değişik biçimde seçilebilir.

Bu seçimlerin herhangi birini göz önüne alalım. seçilen bu 5 rakam $5!=120$ türlü sıralanabileceğinden, 60 seçimin her biri için $5!=120$ sayı yazılabilir. Aranılan sayıların tümü $60.120=7200$ tanedir.

Örnek*: Bir düzlem üzerinde herhangi üçü doğrusal olmayan 12 nokta veriliyor.*

a) Bu noktalar kaç farklı doğru belirtir?

b) Bu noktalar kaç farklı üçgen belirtir?

Çözüm:…

a) 2 nokta bir doğru belirttiği için 12 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı yanıttır. Bu da $C(12,2)=66$ dır.

b) Doğrusal olmayan 3 nokta bir üçgen belirttiği için yanıt $C(12,3)=220$ olur.

Örnek: *Başlangıç noktaları aynı bir P noktası olan ve herhangi ikisi doğrusal olmayan altı tane ışın veriliyor. Bu ışınlardan köşesi P de olan kaç tane açı oluşur?*

Çözüm: Köşesi P de olan ve doğrusal olmayan herhangi 2 ışın bir açı oluşturacağından $C(6,2)=15$ tane açı oluşur.

Örnek*: Bir öğrenci 10 soruluk bir sınava girmiştir.*

a) Soruların 8 tanesini kaç farklı şekilde seçebilir?

b) Bu öğrenci ilk üç soruyu cevaplamak zorunda ise ilk soruyu kaç farklı şekilde seçebilir?

c) Bu öğrenci ilk 5 sorudan dördünü cevaplamak zorunda ise 8 soruyu kaç farklı şekilde cevaplayabilir?

Çözüm:

a) $C(10,8)=C(10,2)=45$

b) İlk üç soruyu cevaplayacağı için kalan 5 soruyu 10-3=7 soru arasından seçmelidir. O halde, $C(7,5)=C(7,2)=21$

c) Öğrenci ilk 5 soruyu cevaplarsa, kalan 3 soruyu kalan 5 sorudan $C(5,3)=10$ yolla seçebilir. İlk 5 sorudan 4 tanesini cevaplarsa, kalan 4 soruyu beş soru içinden seçecektir.
O halde, $10+C(5,4).C(5,4)=10+25=35$ yolla seçebilir.

Örnek: *Asal çarpanlarına ayrılmış şekli $T=2^3.3^4.5^6$ olan bir sayının pozitif tam bölenlerinin,*

a) Kaç tanesinin çift sayı olduğunu,

b) Kaç tanesinin tek sayı olduğunu,

c) Kaç tanesinin 5 ile bölünebildiğini bulalım.

Çözüm:…

$A=\{2^0,2^1,2^2,2^3\}$

$B=\{3^0,3^1,3^2,3^3,3^4\}$

$C=\{5^0,5^1,5^2,5^3,5^4,5^5,5^6\}$

a) Sayının çift olabilmesi için 2 nin katı olması gerekir. O halde, A kümesinden seçilen 2^1 elemanı ile birlikte, A kümesinin diğer 3 elemanından birinin, B kümesinin 5 elemanından seçilen bir eleman ve C kümesinin seçilen 7 elemanından bir elemanın çarpımı T nin pozitif çift tamsayı bölenidir. Dolayısıyla: 3.5.7=105 tanedir.

b) B ve C kümelerinden seçilen birer elemanın çarpımı T nin pozitif tek sayı bölenidir. Çarpım kuralına göre, 5.7=35 tanedir.

c) C kümesinin 5^1 elemanı seçildikten sonra a şıkkındaki çözüm dikkate alınırsa, 1.4.5.6=120 tanedir.

Örnek: $a=\{1,2,3,4,5,6\}$ *kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde,*

a) 2 nin bulunmayacağını

b) 3 ün bulunmayacağını

c) 1 veya 5 den en az birinin bulunacağını bulalım.

Çözüm:

a) 2 nin bulunmadığı 4 elemanlı kümeler diğer 5 elemanla oluşturulacak 4 elemanlı alt kümelerdir. O halde $C(5,4)=C(5,1)=5$ tir.

b) 3 rakamı mutlaka bulunacaksa geri kalan 3 elemanı 5 rakam arasından seçmeliyiz. O halde, $C(5,3)=C(5,2)=10$ olur.

c) 4 elemanlı bütün alt kümelerin sayısından, 1 ve 5 rakamlarının bulunmadığı alt kümelerin sayısı çıkarılırsa, 1 veya 5 in en az birinin bulunduğu alt kümelerin sayısı bulunur. Buna göre, $C(6,4)-C(4,4)=C(6,2)-1=15-1=14$ olur.

Örnek*: 4 doktor ve 6 hemşirenin bulunduğu bir gruptan 5 kişilik bir grup oluşturulacaktır.*

a) Herhangi bir sınırlama yoksa,

b) Bu ekipte tam olarak 2 doktor bulunacaksa,

c) Bu ekipte en az 3 doktor bulunacaksa,

d) Belli bir doktor ile belli bir hemşire aynı ekipte bulunmayacaksa, bu 5 kişilik ekip kaç türlü seçilebilir?

Çözüm:

a) Herhangi bir sınırlama yoksa, $C(10,5)=\dfrac{10!}{5!.5!}=252$ dir

b) $C(4,2).C(6,3)=6.20=120$ dir.

c) İki durum söz konusudur, ya 3 doktor 2 hemşire, ya da 4 doktor 1 hemşire olmalıdır. Buna göre, $C(4,3).C(6,2)+C(4,4).C(6,1)=4.15+1.6=66$ dır.

d) Tüm durumdan, belli bir doktor ve hemşirenin bulunduğu grup sayısını çıkarmalıyız. Belli doktor D, belli hemşire H olsun. Biz içerisinde D ve H nin bulunduğu yani, $\{D,H\}$ gruplarının sayısını bulacağız. Geri kalan 3 kişiyi $C(8,3)=56$ farklı şekilde seçebiliriz. Sonuçta $C(10,5)-C(8,3)=252-56=196$ bulunur.

Örnek: *$n,r\in N$ ve $r<n$ olmak üzere, $C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm:…

$$C(n-1,r-1)+C(n-1,r)=\frac{(n-1)!}{(r-1)!.(n-r)!}+\frac{(n-1)!}{r!.(n-r-1)!}$$
$$=\frac{(n-1)!.(r+n-r)}{r!.(n-r)!}=\frac{n!}{r!.(n-r)!}=C(n,r)$$

dir.

Örnek: *Bir üniversite, 12 öğrenci arasından Ulusal Öğrenci Birliğine katılacak öğrenciler seçecektir.*

a) Bu 12 kişilik öğrenci grubundan 4 kişilik ekip kaç türlü seçilebilir?

b) Bu 12 kişiden ikisi evli ve evli çift birbirinden ayrılmayacaksa seçim kaç türlü yapılır?

Çözüm:

a) 12 öğrenci arasından 4 öğrenci seçimi $C(12,4)=495$ yolla yapılır.

b) Evli öğrenciler C ve D olsun. Eğer C ve D seçilecek grupta yoksa, delege seçimi, $C(10,4)=210$ yolla yapılır. Eğer C ve D grupta varsa, $C(10,2)=45$ yolla yapılır. O halde toplam seçim $210+45=255$ yolla yapılır.

Örnek: *Bir düzlemde, 3 ü aynı doğru üzerinde olmayan A, B, … gibi 12 nokta veriliyor.*

a) Bu 12 noktadan kaç doğru çizilebilir?

b) Bu doğrulardan kaç tanesi A noktasından geçer?

c) Bu 12 noktadan kaç tane üçgen çizilebileceğini bulunuz.

d) Bu üçgenlerin kaç tanesinin köşesi A noktasıdır?

Çözüm:

a) $C(12,2)=66$ doğru çizilebilir.

b) Doğruyu belirten 2 noktadan biri A olduğundan kalan 1 noktayı 11 nokta arasından seçmeliyiz. $C(11,1)=11$ olur.

c) $C(12,3)=220$ üçgen çizilebilir.

d) Üç köşeden biri A olduğu için kalan 2 köşeyi kalan 11 nokta arasından seçmeliyiz. O halde $C(11,2)=55$ olur.

Örnek: *Bir öğretmen 6 kişilik bir öğrenci grubundan, içinde bir veya daha çok öğrenci bulunan grupları kaç türlü seçebilir?*

Çözüm:

$C(6,1)+C(6,2)+C(6,3)+C(6,4)+C(6,5)+C(6,6)=2^6-1=63$

tür.

Örnek: Hangi düzgün bir çokgenin kenar sayısı ile köşegen sayısı birbirine eşittir?

Çözüm: Köşegen sayısı $\dfrac{n^2-3n}{2}$ olduğundan,

$\dfrac{n^2-3n}{2}=n$ olmalıdır.

$\dfrac{n^2-3n}{2}=n$

$n^2-3n=2n$

$n^2-5n=n.(n-5)=0$

n pozitif bir tamsayı olacağından tek cevap n=5 tir.

Örnek*: Ali'nin cebinde 7 tane 5 milyonluk ve 4 tane 10 milyonluk vardır. Ali, 35 milyon liralık hesabı kaç farklı şekilde verebilir?*

Çözüm:

i.) 7 tane 5 milyonluk

ii.) 1 tane 5 milyonluk ve 3 tane 10 milyonluk

iii.) 3 tane 5 milyonluk ve 2 tane 10 milyonluk

iv.) 5 tane 5 milyonluk ve 1 tane 10 milyonlukseçim yapılabilir.bunlar birlikte düşünülürse,

$C(7,5)+C(7,1).C(4,3)+C(7,3).C(4,$

$=21+28+210+84=343$

bulunur.

Örnek: *Bir okulun kantininde 3 ve 4 kişilik 2 yuvarlak masa boştur. 7 öğrenci bu iki masaya kaç farklı şekilde oturabilir.?*

Çözüm: Seçilen 3 kişinin 3 kişilik yuvarlak masa etrafına oturması $C(7,3).(3-1)!=70$ farklı şekilde olur. Geri kalan öğrencilerin 4 kişilik masaya oturması ise $C(4,4).(4-1)!=6$ farklı şekilde olur. Buna göre, 7 öğrenci bu 2 masaya, $70.6=420$ farklı şekilde oturabilir.

ALIŞTIRMALAR

1. Alıştırma: *İngiliz alfabesinde 26 harften 5 tanesi sesli harftir. Buna göre, içinde üç farklı sessiz ve iki farklı sesli bulunan;*

a) 5 harfli kelime vardır?

(C:1596000)

b) İçinde mutlaka B nin olduğu 5 harfli kaç kelime yazılır?

(C:228000)

c) İçinde B ve C harflerinin olduğu 5 harfli kaç kelime yazılır?

(C:22800)

d) Yazılan 5 harfli kelimelerin kaç tanesi B ile başlayıp C ile biter?

(C:1140)

e) A,B ve C harfleri mutlaka olacaksa, 5 harfli kaç kelime yazılır?

(C:9120)

2. Alıştırma:… 3 kişilik olan *A, B, C, D* asansörlerine 12 kişi kaç farklı şekilde binebilir?

(C: $\dfrac{12!}{3!.3!.3!3!}$)

3. Alıştırma: *5 seçmeli dersten belli ikisi aynı saatte verilmektedir. Bu öğrenci bu 5 dersten 3 dersi kaç farklı şekilde seçebilir?*

(C:6)

4. Alıştırma: *Bir tohum şirketi on altılık demetler halindeki lale soğanlarını denemektedir. Her demetten dikilmek üzere 4 soğan seçiliyor. Eğer 4 soğanın hepsi tutarsa geriye kalan 12 soğandan en az 8 tanesi tutar garantisiyle satılıyor. On altılık bir demetten deneme amacıyla dikilecek 4 soğan kaç farklı şekilde seçilebilir?*

(C: $\binom{16}{4}$)

5. Alıştırma: *Yedi demokrat ve altı cumhuriyetçiden ikisi demokrat, ikisi de cumhuriyetçi olmak üzere dört üyeli kaç komisyon kurulabilir?*

(C: $\binom{7}{2}.\binom{6}{2}$)

6. Alıştırma: *Bir briç oyununda içinde bir renkten 7 ve başka 2 renkten iki kağıt bulunan kaç el teşkil edilebilir? (Burada renk deyince kupa, maça, sinek veya karo anlaşılmalıdır.)*

(C: $\binom{4}{1}.\binom{13}{7}.\binom{3}{2}.\binom{13}{2}\binom{13}{2}$)

7. Alıştırma:…

$$C(n,n-2)=C(n-1,n-2)+C(n-2,n-3)+\ldots+C(2,1)+C(1,0)$$
$$(3\leq n)$$

olduğunu ispat ediniz.

Binom Teoremi

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

formülü bize yabancı değildir. *x + y* nin daha yüksek binom kuvvetlerini bulmak için her sonucu sırası ile x + y ile çarpar ve bunu x ve y nin bir polinomu olarak yazarız. Böylece,

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x+y)^2 (x+y)\\ &= (x^2 + 2xy + y^2)(x+y)\\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + y)^4 &= (x + y)^3 (x + y)\\ &= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x + y)\\ &= x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 + x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 + y^4\\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Bu yolu izleyerek $(x + y)^n$ nin daha yüksek kuvvetlerinin açılımın, adım adım götürmekle elde edebiliriz.

Bununla beraber, n bir doğal sayı olmak üzere, $(x + y)^n$ nin açılımını elde etmek için kombinezon teorisini uygulamak olanağımız vardır. Böylece herhangi bir n verildiğine göre açılımın tamamını yazmak için daha küçük açılımlarını belirtmekten kurtulmuş ve adım adım ilerleme yönteminden kaçınmış olabiliriz.
Örneğin $(x + y)^{100}$ ün açılımındaki ilk altı terimin katsayılarının istendiğini farz edelim. (Böyle soruların sosyal ve bilimsel problemlerde çok defa ortaya konduğunu burada açıklamayacağız.) Formülü kullanarak, $(x + y)^{100}$ ün daha önceki açılımlarındaki bütün katsayıları bulmadan, elde edeceğiz; istenilen ilk altı katsayıyı, ön hesaplamaları yapmadan yazabileceğiz.

Genel probleme başlamadan önce ona basit bir şekil verelim:

$$(x + y)^n = [x (1 + y/x)]^n = x^n (1 + y/x)^n$$

$z = y/x$ koyacak olursak, problemimiz $x^n (1 + z)^n$ nin açılımına dönüşmüş olur. Böylece $(1 + z)^n$ nin açılımındaki katsayıları belirtmek sureti ile istenilen elde edilebilir. Soruların tamamını elde etmek için son açılımdaki her terim x^n ile çarpılır. En sonunda z yerine y/x konularak $(x + y)^n$ nin açılımını elde ederiz.

Yeniden $(1 + z)^n$ nin açılımına dönelim. Bu açılımdaki katsayıları elde etmek üzere dikkatimizi şu çarpıma çevirelim:

$$(1 + z_1)(1 + z_2)\ldots(1 + z_n)$$

$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ alırsak yukarıdaki çarpım, n tane çarpanı olduğu için, $(1 + z)^n$ ye dönüşür.

Önce bazı örneklere bakalım.

n = 2 için $(1 + z_1)(1 + z_2) = 1 + (z_1 + z_2) + z_1z_2$

n = 3 için:

$(1 + z_1)(1 + z_2)(1 + z_3) = 1 + (z_1 + z_2 + z_3) + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) + z_1z_2z_3$

n = 4 için:

$(1 + z_1)(1 + z_2)(1 + z_3)(1 + z_4) = 1 + (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4) + (z_2z_3z_4 + z_1z_3z_4 + z_1z_2z_4 + z_1z_2z_3) + z_1z_2z_3z_4$

bulunur. Bu örneklere bakıp genel kalıp için bir ipucu elde ederiz. $n = 2$ için $\{z_1, z_2\}$ cümlesini ele alalım. Boş olmayan alt cümleleri

$\{z_1\}, \ \{z_2\}, \ \{z_1, z_2\}$

dir; bunun her birini, açılımdaki bir terimle eşleyebiliriz :

$\{z_1\}, \ \{z_2\}, \ \{z_1, z_2\}$

$z_1 \ , \ z_2 \ , \ z_1z_2$

Benzer şekilde n = 3 için $\{z_1, z_2, z_3\}$ cümlesinin boş olmayan alt cümlelerini yazar ve açılımdaki terimleri bu alt cümlelerle eşliyebiliriz :

$\{z_1\}, \{z_2\}, \{z_3\}, \{z_2, z_3\}, \{z_1, z_3\}, \{z_1, z_2\}, \{z_1, z_2, z_3\}$

$z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_2\ z_3 \quad z_1\ z_3 \quad z_1\ z_2 \quad z_1\ z_2\ z_3$

Açılımların hepsinde (en az n = 2, n = 3 için) yazılı terimlerin toplamına fazladan '1' in eklenmesi gerekmektedir.Bu kalıp n = 4 için de doğrudur.

z_1, z_2, z_3 .... vb. yerine z koyunca ne olur?

z nin birinci kuvvetinden oluşan terimlerin toplamı bunlara karşılık olan 1 elemanı alt cümlelerdir; z nin ikinci kuvvetinden oluşan terimlerin toplamı bunlara karşılık olan 2 elemanlı alt cümlelerdir vb. Böylece z lerin sayısı (diğer bir deyimle açılımdaki z nin katsayıları) C(n , 1) dir; z^2 nin katsayısı C(n , 2); ve n>2 için, z^3 ün katsayısı C(n, 3) tür. Bu gözlemler en az n = 2, n = 3, n = 4 için gerçeklenebilmektedir.Binom teoremi,herhangi bir n doğal sayısı için de bunun doğru olduğunu iddia etmektedir.

Genel olarak

$(1+z_2)(1+z_2) \ldots\ldots (1+z_n)$

çarpımının açılımındaki terimler şu şekildedir :

$$\begin{array}{ll} z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n & C(n, 1) \\ z_1z_2, z_1z_3, \ldots\ldots, z_{n-1}z_n & C(n, 2) \\ z_1z_2z_3, \ldots\ldots, z_{n-2}z_{n-1}z_n & C(n, 3) \\ \ldots\ldots\ldots & \\ z_1z_2, \ldots\ldots, z_n & C(n, n) \end{array}$$

Her satırın sağındakiler, o satırdaki terim sayısını gösteriyorlar $z_1, z_2, \ldots, z_n$ lerin her biri yerine z koymakla şu terimler elde edilir :

$$\begin{array}{ll} z, z, \ldots, z & C(n, 1) \\ z^2, z^2, \ldots, z^2 & C(n, 2) \\ z^3, z^3, \ldots, z^3 & C(n, 3) \\ \ldots\ldots\ldots & \\ z^n & C(n, n) \end{array}$$

Bütün bu terimleri toplayarak şu açılımı elde ederiz :

$(1+z)^n = 1 + C(n, 1)\, z + C(n, 2)\, z^2 + C(n, 3)\, z^3 + \ldots + C(n, n)\, z^n$ veya $C(n, 0) = 1$ tanımını yaparak daha derli toplu olarak

$$(1+z)^n = {}_{m=0}\textstyle\sum^n \ C(n, m)\, z^m$$

Yeniden asıl sorumaza dönüp $(x+y)^n$ nin açılımına bakalım ; z yerine y/x koyarak :

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= x^n\{1+y/x\}^n \\ &= x^n\{1 + C(n, 1)\, y/x + C(n, 2)\, y^2/x^2 + \ldots + C(n, n)\, y^n/x^n\} \\ &= x^a + C(n, 1)\, x^{n-1}y + C(n, 2)\, x^{n-2}y^2 + \ldots + C(n, n)y^n \quad \textit{veya} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+1)^n &= x^n\,(1+y/x)^n \\ &= x^n \sum_{m=0}^{n} C(n, m)\, y^m/x^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} C(n, m)\, x^{n-m}\, y^m \end{aligned}$$

elde edilir. Bu *Binom Teoremi* dir.

Teorem: *n, herhangi bir doğal sayı ve x ile y birer reel (veya kompleks) sayı ise*

$$\begin{aligned} (x+y)^a &= \sum_{m=0}^{n} C(n, m)\, x^{n-m}\, y^m \\ &= x^n + C(n, 1)\, x^{n-1}\, y + \ldots + C(n, n)\, y^n \end{aligned}$$

dir.

Örnek:

$(x+y)^5 = x^5 + C(5, 1)\, x^4y + C(5, 2)\, x^3y^2 + C(5, 3)\, x^2y^2 + C(5, 4)\, xy^4 + C(5, 5)y^5$
$= x^5 + 5x^4 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Örnek:

$$\left(x^2-3\sqrt{y}\right)^4 = \left(x^2\right)^4 + 4\left(x^2\right)^3\left(-3\sqrt{y}\right) + 6\left(x^2\right)^2\left(-3\sqrt{y}\right)^2$$
$$+4\left(x^2\right)\left(-3\sqrt{y}\right)^3 + \left(-3\sqrt{y}\right)^4$$
$$= x^8 - 12x^6\sqrt{y} + 54x^4y - 108x^2y\sqrt{y} + 81y^2$$

Teorem: $x = y = 1$ alındığında

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{m=0}^{n} C(n,\ m)\ 1^{n-m}\ 1^m$$

$= \sum_{m=0}^{n} C(n,\ m)$ elde edileceğine dikkat ediniz.

Böylece n elemanlı bir cümlenin
0-elemanlı alt cümlelerinin toplam sayısı C(n, 0)
1-elemanlı alt cümlelerinin toplam sayısı C(n, 1)
2-elemanlı alt cümlelerinin toplam sayısı C(n, 2)
. . . .
n-elemanlı alt cümlelerinin toplam sayısı C(n, n)

Yukarıda yazılı olan bütün alt cümlelerinin toplam sayısı 2^n dir. N elemanlı bir cümlenin (kendisi ve boş cümle dahil) bütün alt cümlelerinin sayısının 2^n olduğunu görmüş olduk.

DİZİLİŞ VE PARÇALANIŞ

Verilen sonlu bir cümlenin elemanlarının permütasyonlarını ve kombinasyonlarını ele almıştık. Bu kesimde ,çözümleri bizim önceki sonuçlara dayanan diğer bir çeşit sayma problemini göz önünde bulunduracağız.

Örnek: "*saat"* kelimesindeki harfleri farklı kaç şekilde dizebilirsiniz?

Çözüm: Saat kelimesi yerine 'suat' kelimesini alsaydık önceki kesimlerde incelediğimiz metodlardan dolayı cevabın *P(4, 4*) yani 24 olacağını söyleyebilirdik. Bununla beraber elimizdeki problemde tekrar eden harf olduğu için cevabın daha küçük olacağını tahmin edebiliriz. 'suat' ve 'saut' permutasyonlarını birbirinden farksız olan 'saat' ve 'saat' dizilişlerine karşılık tutabiliriz. Gerçekten {s,u,a,t} cümlesinin bütün 4-lü permutasyonlarının tüm bir listesini ele alalım. Bu permutasyonları şöylece ikileyebiliriz;

suat, saut,: usat, asut ; uast , aust ;
tsua, tsau ; tusa, tasu ; tuas , taus ;
utsa, atsu ; utas, atus ; stua , stau ;
uats, auts ; suta , satu ; usta , astu ;

Bu çiftlerin herbirinde 's' ve ' t ' harfleri aynı yerlerde bulunuyorlar, fakat ' u ' ve ' a ' kendi aralarında yer değiştirmiştir. Bura[d]aki her ' u ' yerine ' a ' konulacak olursa bu çiftlerin herbiri 'saat ' kelimesindeki harflerin birbirinden farksız olan dizilişleri haline gelir. Böylece ' saat ' ın harflerinin birbirinden farksız olan dizilişlerinin sayısı ' suat ' da ki harflerin dizilişlerin sayısının yarısı olur. Bu nedenle cevabımız 12 dir.

Bu örnek, içinde tekrarlama bulunan dizilişlerin sayısını belirten genel problemin çözümü için bir yol göstermektedir.

"Saat" kelimesindeki harflerin her bir dizilişini *(s, u, a, t)* cümlesinin permütasyonlarından *(u, a*) nın permütasyonlarını silerek elde ederiz; bunların sayısı da P(2, 2) olur.

"basamaklar" kelimesindeki 10 harfin dizilişlerinin sayısını bulma problemini göz önüne alalım. Burada *"a"* harfi 4 defa, fakat diğer 6 harf birer defa geçiyor. 10 harfi bulunan örneğin *(b, a, s, o, m, i, k, l, e, r)* cümlesinin elemanlarının permütasyonlarının sayısı *P(10, 10)* dur. "basamaklar" kelimesindeki harflerin farklı dizilişlerinin bilinmiyen sayısını A ile gösterelim. *b,* ***a****, s,* ***o****, m,* ***i****, k, l,* ***e****, r,* deki siyah harflerin permütasyonlarını sayısı *P(4, 4)* dür. Böylece

$$A.P(4, 4) = P(10, 10)$$

ve

$$A = \frac{P(10,10)}{P(4,4)} = \frac{10!}{4!} = 10.9.8.7.6.5$$

bulunur.

Genel olarak, m tanesi aynı olan n sayıdaki eşyanızdan geriye kalan m – n tanesinin hiçbiri birbirlerinin aynı olmasın. Örneğin,

$x, x, y, z, x, u, x, v.$ $(n = 8, \quad m = 4)$

Verilen bu listede tekrar eden elemanlara karşılık tutulan elemanları farklı olan

$x_1, x_2, y, z, x_3, u, x_4, v$

listesini göz önüne alalım; buradaki ayırma indislerle yapılmıştır. İkinci listedeki permütasyon sayısı P(n, n) dir. Birinci listedeki her diziliş ikincideki P(m, m) tane permütasyonla eşlenebilir. Eğer verilen ilk listedeki dizilişlerin sayısını A ile gösterirsek

$A.P(m, m) = P(n, n)$ $A = \dfrac{n!}{m!}$ dir.

m_1 tanesi aynı türden, m_2 tanesi ikinci, m_3 tanesi üçüncü bir türden v.b.olan ve

$$n = m_1 + m_2 + ...+m_k$$

şartını gerçekliyen n elemanımız bulunsun. Eğer farklı dizilişlerin sayısını A ile gösterirsek, bu sayı

$$m_1 ! \, m_2 ! \, ... \, m_k ! \, A = n !$$

veya

$$A = \frac{n!}{m_1!.m_2!\ldots m_k!}$$

olur.

Özel iki duruma dikkat etmeliyiz. Eğer, ilk örneklerde olduğu gibi, $m_1 = m$ ve $m_2 = ... = m_k = 1$ ise

$$A = \frac{n!}{m_1!.1!\ldots 1!} = \frac{n!}{m!}$$

elde edelir, böylece önce bulduğumuz formülller, genel formülün özel durumları olurlar. Eğer,

$k = 2, \ m_1 = m$ ve $m_2 = m - n$ ise

$$A = \frac{n!}{m!.(n-m)!} = C(n,m) = \binom{n}{m}$$

bulunur.

Örnek: *"MARMARA" daki harfleri farklı kaç şekilde dizebilirsiniz?*

Çözüm: Bu kelimede 3 çü bir tür (A), 2 si bir tür (M) ve 2 si başka bir tür (R) olan 7 harf bulunuyor. Formül yardımıyle,

$$\frac{7!}{3!.2!.2!} = 210 \text{ bulunur.}$$

BİR CÜMLENİN PARÇALANIŞI

Bir A cümlesinin aşağıdaki özellikleri taşıyan alt cümlelerinin bir kolleksiyonuna A cümlesinin **parçalanışı** diyoruz:

i.) Kolleksiyondaki alt cümlelerden herhangi ikisinin ortak hiçbir elemanı yoktur.

ii.) Kolleksiyondaki bütün alt cümlelerin birleşimi A ya eşittir.

Böylece *A* nın her bir elemanı bir ve yalnız bir alt cümlededir. Alt cümlelerin her birine parçalanışın **hücre**leri denir.

Örnek*: Şu iki alt cümle:*

1.) doğal çift sayıların cümlesi,

2.) doğal tek sayıların cümlesi,

doğal sayılar cümlesinin bir parçalanışını teşkil ederler. Bunun hücreleri yukarıda yazılı olan iki cümledir. Şu üç cümle:

1.) pozitif reel sayılar cümlesi,

2.)negatif reel sayılar cümlesi,

3.) elemanı yalnız sıfır olan cümle,

reel sayılar cümlesinin bir parçalanışını teşkil ederler.

Örnek: *a, b, c* cümlesinin parçalanışları aşağıdadır (boş hücre hariç başkası yoktur)

{ {a} , {b}, {c} } ;{ {a, b} ,c } ;{{a, c} ,b}

{ {c, b} , a } ;{ {a, b, c} }

bir parçalanış, elemanlı cümleler olan bir koleksiyon veya bir cümle olduğu için bunları yazarken cümleyi belirten parantezleri koymamız gerekmektedir. Ekonomi (mürekkepten) ve okuma kolaylığı nedeniyle parçalanış için yeni ve değişik bir notasyon tanıtılacak ve sırasıyle bunları şöyle yazacağız:

[a; b; c] ,[a, b; c], [a, c; b], [c, b; a], [a,b,c] .

eğer elemanları yazmadan yalnız cümleden bahsetmek istiyorsak, hücreleri $A_1, A_2, \ \ldots \ , A_k$ olan bir A cümlesinin parçalanışını (her daim olduğu gibi) şöyle yazarız:

$\{ A_1 , A_2 ,.......,A_k \},$

Burada $A_1, A_2, ... ,A_k$ ler A nın bazı alt cümleleridir.

$\{ A_1, A_2, ...,A_k \}$

Cümlesinin k - lı permütasyonlarını göz önüne aldığımız zaman, aşağıda yazılı olduğu gibi sıralı k – lılarla uğraşıyoruz demektir:

$$(A_1 , A_2 ,......, A_k) ,$$
$$(A_2 , A_1 ,......, A_k) ,$$
$$(A_k , A_1 ,......, A_2) ,$$

Bir cümlenin k hücreli bir parçalanışının her bir k – lı permütasyonuna cümlenin bir **sıralı parçalanışı** denir. $(A_1 , A_2 , ..., A_k)$ sıralı parçalanışındaki A_1 de n_1 eleman, A_2 de n_2 eleman,..., A_k da n_k eleman varsa bu parçalanışı bir $(n_1 ; n_2 ; ...;n_k)$ parçalanışı olarak ifade edeceğiz.

Şimdi ortaya koyduğumuz problem şudur: n elemanlı, verilen sonlu bir A cümlesinin $(n_1 ; n_2 ;.....; n_k)$ şeklindeki $(A_1 , A_2 ,...., A_k)$ parçalanışlarından kaç tane vardır? Burada $n_1 , n_2 ,..., n_k$ lar sırasıyla $A_1 , A_2 ,...,A_k$ nın eleman sayılarını göstermektedir. Parçalanışların *(i), (ii)* özelliklerinden

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n$$

olduğu görülür.

Artık bu problemin gerçekten çözülmüş olduğunu görebileceğiz. Yapılacak bütün iş, uygun bir şekilde bunu ifade edebilmektir. Bununla beraber önce bir örneğe bakalım:

Örnek: *{a, b, c, d, e, f, g} nin (3; 2; 2) parçalanışlarından bazıları şunlardır:*

[a, b, c; d, e; f, g] [a, b, d; c, e; f, g] , [a, b, d; e, f; e, g]

şüphesiz daha bir çokları var. Bununla beraber, şu parçalanışlar

[a, c, b; d, e; f, g] ,[a, b, d; e, c; g, f] , [d, a, b; c, f; g, e]

bir öncekilerin sırasıyle aynı olan sadece başka bir yazılıştır. Bu iki yazılışta, örneğin birincileri göz önüne alalım. Daha ayrıntılı notasyon kullanırsak bunları

{ {a, b, c},{d, e},{f, g} } ve {{a, c, b}, {d,e} ,{f,g} }

şeklinde yazabiliriz. Fakat *{a, b, c}* ve *{a, c, b}* cümleleri, elemanları aynı olduğu için birbirine eşittir. Aynı nedenle bu parçalanışlardaki diğer cümleler de eşittir.

Bu örnek bize bir sırrı açıklamaktadır. Değişik hücrelerin elemanları yeniden sıralanırsa bu hücreler değişmezler. Parçalanmayla ilgili olduğu sürece aynı hücredeki elemanlar birbirinden "farksız"dır. Böylece verilen bir hücredeki elemanların permütasyonları parçalanmanın kendisine etken olmuyor. Bu nedenle her sıralı parçalanma,

a, b,c; d, e; f, g

tüm cümlenin $3!x2!x2!$ permütasyonlarına karşılık olur.

Verilen cümlede 7! permütasyon olduğu için bu cümledeki *(3; 2; 2)* parçalanışının sayısı

$$\frac{7!}{3!.2!.2!}$$

dir.

Bu sonucu başka bir yoldan da açıklıyabiliriz. Alt cümlelerin tekrarlı elemanı olan sıralı bir üçlüsünü istiyoruz. (Üç elemanı olan) ilk hücreyi, $C(7, 3)$ şeklinde "seçebiliriz". Herhangi iki hücrenin hiç ortak elemanı olmadığı için (2 elemanı olan) ikinci hücreyi $C(4, 2)$ şeklinde "seçebiliriz". Son olarak, üçüncü hücreyi $C(2, 2)$ şeklinde "seçebiliriz". Böyle bir sıralı parçalanış

$C(7, 3) . C(4, 2) . C(2, 2)$ veya

$$\frac{7!}{3!.2!.2!}$$

şekilde teşkil edilebilir.

Genel olarak, n – elemanlı bir cümlenin $(n_1, n_2, ... , n_k)$ parçalanışlarının sayısı

$$\frac{n!}{n_1!,n_2!.....n_k!} \quad , \quad (n = n_1 + ... + n_k)$$

dır.

Örnek: *Bir tenis turnuvası elemesinde 10 oyuncu bulunuyor. İlk karşılaşma programı kaç şekilde düzenlenebilir?*

Çözüm: 10 elemanlı (10 oyuncu) bir cümlenin (2; 2; 2; 2; 2) parçalanış sayısını bulmak istiyoruz. Bu sayı $10! / (2!)^5$ veya yaklaşık olarak $1,1x10^5$ dir.

Örnek: *Verilen n elemanlı bir cümlenin kaç (m; n – m) parçalanışı vardır?*

Çözüm: $\dfrac{n!}{m!.(n-m)!}$. Bu sayı C(n, m) dir. Bunun böyle olduğu, şuna dikkat edilerek belki görülebilir; ilk hücrede m eleman bulunuyor – eğer kalırsa – diğer elemanların hepsi ikinci hücrede bulunur. böylece n – elemanlı bir cümlenin (m; n-m) parçalanışı verilen cümlenin alt cümleleri ile eşlenmiş olur.

TEKRARLI SEÇMELER

Büyük bir dükkanda n – çeşit eşya ve her türlü eşyanın alabileceğinizden çok fazlası ile bulunduğunu farzedelim. m eşyayı kaç değişik şekilde seçebilirsiniz?

Bu problem, ele almış olduğumuz diziliş sorusundan iki bakımdan ayrılmaktadır: bunlardan biri, “seçilen “ eşyanın sırasına önem verilmemesi, ikincisi de, her çeşitten sayısız çoklukta – kaynak bakımından – seçme olanağının sağlanmış olmasıdır. Son kabul kolaylık sağlamak içindir; bunu var saymasaydık problem daha güç olurdu.

m =1 ile başlayalım.bunun cevabı n dir, çünkü eğer bir eşya seçersek seçimimiz n çeşitin bir tanesini seçmeye dönüşür. Bu seçim C(n, 1) yoldan yapılır.

m =2 için soru daha ilginçleşir. İki eşya ya aynı veya değişik türden olabilir. Fakat her iki halde de seçim sırası söz konusu olamaz.

Türlerin her birini (sayısı n olsun) 1, 2, 3, ... , n sayılarıyle eşliyelim. Problemimiz, böylece 1, 2, 3, ... , n sayısının sıralı olmayan ikililerinin sayısını belirtmeye dönüşür.

1, 2, 3, ... , n elemanlarının sıralı ikililerinin tablosuna bakalım.

	1	2	3	4	…	n
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	…	$(1,n)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	…	$(2,n)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	…	$(3,n)$
…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…
n	$(n,1)$	$(n,2)$	$(n,3)$	$(n,4)$	…	(n,n)

Köşegen üzerindeki ikililer aynı türden olan iki eşyanın seçimini, köşegen üzerinde olmayanlar da farklı türden iki eşyanın seçimini temsil ederler. Fakat köşegenin üst tarafında bulunan her ikilinin temsil ettiği seçim, alt tarafındaki ikililerin temsil ettiği seçimin aynıdır. Köşegenlerin alt tarafındaki ikililerin hepsinin silindiğini farzedelim. Böylece yalnız saymak istediğimiz seçimin her birini temsil eden birer ikili kalır. Bunların sayısı

$$1 + 2 + 3 + ... + n = n.(n+1)/2$$

veya

$$C(n + 1, 2)$$

dir.

m = 3 durumunu incelemeden önce, birinci bileşeni ikincisinden büyük olmayan (a, b) sıralı ikililerinin sayısının hesaplanmasını gözleyelim, burada $1 \le a \le b \le n$ dir. Bu diğer bir bakımdan n elemanlı bir cümleden elde edilen sıralı olmayan ikililerin sayısını bulmanın yoludur.

m =3 için ve $1 \le a \le b \le c \le n$ olmak şartıyle (a, b, c) sıralı üçlülerinin sayısını bulmak istiyoruz. m =2 de olduğu gibi eşitsizlikler zinciri bu üçlülerin birden fazla permütasyonların kullanılmasını önlüyor.

Bir seçme yaptığımızı farzedelim ve bunu a($1 \le a \le n$) ile gösterelim. $a \le b \le c \le n$ olmak şartıyla daha iki seçme yapabileceğiz. b ve c yi seçmekle, (n – a + 1) elemanlı

$$\{ a, a + 1, ... ,n \}$$

cümleden iki sayı seçmek birbirine denktir. Bu nedenle her bir a ($1 \le a \le n$) **nın seçilmesi halinde** b ve c, $\binom{n-a+2}{2}$ yoldan seçilebilir; burada $a \le b \le c \le n$ dir. İlk bileşenleri aynı olan herhangi 2 üçlü olmadığından dolayı (ilk bileşenin son bileşeni var etmesi) bize toplam seçme sayısının şöyle olduğunu ifade etmektedir:

$$S(n,3)=C(n+1,2)+C(n,2)+C(n-1,2)+\ldots+C(3,2)+C(2,2)$$

Pascal teoremini kullanarak $C(3,2)+C(3,3)=C(4,3)$ ve $C(2,2)=C(3,3)$ gerçeğini uygulayarak, $C(3,2)+C(2,2)=C(4,3)$ yazabiliriz. Böylece,

$$S(n,3)=C(n+1,2)+C(n,2)+C(n-1,2)+\ldots+C(4,2)+C(4,3)$$

$$S(n,3)=C(n+1,2)+C(n,2)+C(n-1,2)+\ldots+C(5,3)$$

$\ldots\ldots\ldots$

$$=C(n+2,3)$$

Ortaya çıkan kalıplar şöyledir:

$S(n,1)=C(n,1)$

$S(n,2)=C(n+1,2)$

$S(n,3)=C(n+2,3)$

Genel olarak,

$S(n,m)=C(n+m-1,m)$ dir.

Örnek: *Bir milyonerin 50 mirasçısı bulunuyor. Her birini, bir kuruşundan bile mahrum etmeyi düşünmeyen bu milyoner (vergiler ve harçlar hariç) bir milyon lirasını mirasçılarına vasiyet yolu ile dağıtmak istiyor. Kaç şekilde vasiyetname yazabilir?*

Çözüm:... n = 50, m = 10^8 (kuruş). Vasiyetname sayısı $\binom{100000049}{50}$ veya yaklaşık olarak $7{,}9.10^{196}$ dır. Bu da oldukça büyük bir kararı gerektirir.

NESNELERİN DAĞILIMLARI

r tane nesneyi n tane farklı kutuya belli şartlar altında nasıl dağıtabiliriz? Bu sorunun çözümünde iki durumla karşılaşırız.

i.) Nesneler farklı ise

ii.) Nesneler aynı (özdeş) ise

1.) Durum: *r farklı nesneyi, n farklı kutuya dağıtmak*

i.) Eğer her bir kutu en fazla bir nesne alacaksa, nesnelerin dağılımlarının sayısı, $n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-r+1)=P(n,r)$ dir. Birinci nesne n kutudan birine, ikinci nesne n-1 kutudan birine ve bu şekilde devam ederiz.

ii.) Eğer her bir kutuya herhangi bir sayıda nesne koyarsak, nesnelerin

dağılımlarının sayısı $n.n.\ldots.n=n^r$ dir. Her bir nesne, n kutudan birine yerleştirilebilir.

iii.) Her bir kutuda herhangi bir sayıda nesne olsun ve her bir kutudaki bu nesnelerin dizilişi de dikkate alınacaksa; bu durumda, 1. nesneye a_1 diyelim. Bunu n kutudan birine yerleştiririz. 2. nesneye a_2 diyelim. Bunu n+1 yerden birine koyarız. Çünkü n-1 kutu ile a_1 nesnesinin sağı ve solunu da hesaba katarız. Aynı şekilde 3. nesne için n+2 yer vardır. Bu durumda nesnelerin dizilme sayısı: $n.(n+1).(n+2).\ldots.(n+(r-1))$ dir.

2.) Durum: *r Tane Aynı Nesneyi n Farklı Kutuya Dağıtmak*

i.) Her bir kutunun en fazla bir nesne aldığını (r<n) kabul edelim. Bu durumda, n

farklı kutudan r kutu seçme ile nesnelerin dağıtım sayısı (1-1) eşlenir. Böylece,

dağıtım sayısı: $C(n,r)$ olur.

ii.) Her bir kutuya herhangi bir sayıda nesne koyalım. Bu durumda, dağıtım şu

şekilde gösterilebilir: $\{r_1.a_1, r_2.a_2, \ldots, r_n.a_n\}$ r_i ler negatif olmayan tamsayılardır.

$r_1+r_2+\ldots+r_n=r$ dir. Bunu daha önce yapmıştık: $H_r^n=\binom{r+n-1}{r}$

iii.) Her kutuda en az bir nesne ($n\leq r$) olduğunu kabul edelim. Yani hiçbir kutu

boş kalmasın. Bu durumda, önce her bir kutuyu istenen şartlarda doldururuz.

Sonra kalan r-n nesneyi kutulara gelişigüzel yerleştiririz. Bu da,

$$\binom{(r-n)+n-1}{r-n}=\binom{r-1}{n-1} \text{ dir.}$$

Örnek: *3 farklı fizik ve 5 farklı matematik kitabı bir rafa dizilecektir.Fizik kitapları herhangi bir yerde yanana gelmemek, başta ve sonda birer tane matematik kitabı olmak şartı ile kaç farklı şekilde sıralanır?*

Çözüm: 3 farklı fizik kitabı 3! şekilde sıralanır. 5 matematik kitabını 5 özdeş x gibi düşünelim.
$xF_1xF_2xF_3x$ x leri şekildeki gibi yerleştirelim ki fizik kitapları birbirinden ayrılsın. Geri kalan bir x i 4 yere $C(1+4-1,1)=C(4,1)$ şekilde yerleştiririz.

İstenen durum sayısı: $3!.\binom{4}{1}.5!$ dir.

BİRİM KATSAYILI DOĞRUSAL DENKLEMLER

(Doğrusal Denklemlerin Tamsayı Olan* Çözüm *Sayısı)

$x_1+x_2+\ldots+x_n=m$ denkleminde x_1, x_2, ...x_n n tane bilinmeyen , n ve m tamsayı ve $0\le m$, $1\le n$ dir. Bu denklemin tamsayı çözümleri n-li (e_1, e_2, ...e_n) dir.

$x_1+x_2+x_3=3$ ise (0, 1, 2), (-1, -2, 6), (0, 0, 3) çözümlerden bazılarıdır. Her negatif olmayan tamsayı çözümleri (e_1, e_2,........, e_n) r tane aynı tip nesnenin n farklı kutuya dağıtılması ile aynıdır.

Farklı çözümlerin sayısı ise, kutulardaki farklı dağılımlara bağlıdır. Bu şekilde her dağılım, aynı zamanda negatif olmayan çözüm sayısıdır. Bu da $\binom{m+n-1}{m}$ dir.

Örnek*:* *x+y+z+w = 10 eşitliğini sağlayan (x, y, z, w) pozitif tamsayı sıralarının sayısının bulunmasını veren formülü çıkarınız.*

Çözüm:… 10 ifadesini 10 adet birimi göstermesi için t ile, 10 birimin oluşturduğu 9 boşluğu da b ile gösterelim.
tbtbtbtbtbtbtbtbtbt.

Eğer, *ttbtttbtbttt.* şeklinde gösterirsek, x=2, y=3, z=1, w=4 demektir. Dolayısıyla boşlukların seçimi *x+y+z+w =10* eşitliğinin pozitif tam sayılardaki çözümünü verir. Bu da 9 boşluktan 3 boşluk seçme demektir. Yani **C(9, 3) = 84** tür.

NOT*:* *$x_1+x_2+.......+x_n$ = m ise pozitif tam sayılardaki çözüm sayısı C(m-1, n-1) dir.*

Örnek*:* *x+y+z+w =10 eşitliğini sağlayan negatif olmayan (x, y, z, w) dörtlüklerinin sayısını bulunuz.*

Çözüm: Bu soru diğerinden birazcık farklı. Çünkü çözüm kümesi içinde sıfır da var.btbtttbtttt şeklinde olursa, x=0, y=1, z=4, w=5 olur.
Eğer x=2, y=0, z=5, w=3 ise ttbbttttbttt olur. Çözüm sayısı 10 birim ve 3 boşluk olduğundan C(13, 3) dür.

NOT: *$x_1+x_2+.....+x_n$ = m eşitliğinde n değişkenin toplamı m olmalıdır. Negatif olmayan çözüm sayısı, m tane birim ve n-1 tane boşluk olduğundan C(m+n-1, n-1) dir.*

.

ŞARTLI BİRİM KATSAYILI DENKLERİN ÇÖZÜMÜ

x+y+z +w = 32 denkleminin tamsayılarda 5 den büyük olan kaç çözümü vardır? x=6 , y=7, z=9, w=10 bir çözümdür. Şimdi her değişken 5 den büyük olacağından her birinden 5 çıkaralım. Dolayısıyla , pozitif dört sayı elde ederiz.

a = x-5 , b = y-5 , c = z-5 ,d = w-5
a+b+c+d = x+y+z+w-20 = 12 bulunur.

x = 6 *a = 1*

y = 7 *b = 2*

z = 9 *c = 4*

w = 10 *d = 5*

Burada her *x , y, z , w* değişkeninin 5 ten büyük olması durumunda , *a,b,c,d* değişkenleri de sıfır-

dan büyük olmuş olur. Dolayısıyla , $x + y + z + w = 32$ denkleminin çözümlerinin 5'den büyük değerlerini bulmak demek ,a + b + c + d =12 denklemini pozitif tamsayılarda çözmek demektir.
Bu da C(12 – 1 , 4 – 1) = C(11 , 3) tür.

Örnek: *1 ile 1.000.000 arasında rakamların toplamı 12 yapan kaç sayı vardır ?*

Çözüm: 1.000.000 sayısının rakamları toplamı 12 yapmadığından , ihmal edebiliriz. Şimdi 1 'den 999.999 'a kadar olan sayıları (sıfırları da) sayarak 6 basamaklı düşünelim. O zaman sorumuz $x_1+x_2+.......+x_6 = 12$ şeklini alır.

C(12 + 6 –1 , 6 – 1) = C(17 , 5) tir. Burada , negatif olmayan sayılarda çözüm bulduk. $x_1 > 9$ şartı ile çözüm C(8 , 5) tir. Aynı şekilde $x_2 > 9$, $x_3 > 9$, ..., $x_6 > 9$ değerlerini de bulup , C(17 , 5) den çıkardığımızda ,C(17 , 5) – 6.C(8 , 5) dir.

Örnek: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \le 19$ *eşitsizliğinin negatif olmayan tamsayılarda kaç çözümü bulunur?*

Çözüm: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \le 19$ *ise* $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+y=19$ *dur.*

$0 \le y, 0 \le x$ *dir. Buna göre,* $\begin{pmatrix} 19+7-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 6 \end{pmatrix}$ *dir.*

MÜMKÜN KONUM SAYISI

n farklı nesne n! şekilde dizilebilir. Yani *n.(n-1).......2.1 = n*! dir. Fakat aynı sonucu başka bir yöntem ile de bulabiliriz: n nesneden birincisini (A' yı)bir düzlem üzerinde bir yere koyabiliriz. İlk nesneyi koyduktan sonra ,ikinci nesne (B) için mümkün konum sayısı ikiye çıkar. (*A* 'nın sağı veya solu). Üçüncü nesneyi ise 3 yere koyabiliriz. Böylece diziliş sayısı: *1.2.3......n = n!* olur.

GÜVERCİN YUVASI İLKESİ

(Çekmece Gözü Prensibi)

k ve n herhangi iki pozitif tam sayı olsun.Eğer n kutuya en az $kn+1$ nesne dağıtılacaksa , bir kutuda en az k+1 nesne bulunur.Ya da en az *n+1* nesne n kutuya dağıtıldığında , kutulardan birinde en az iki nesne bulunur.

Hiçbir kutuda k+1 veya daha fazla nesne yoksa , o zaman her kutuda en fazla k nesne vardır.Bu da nesnelerin toplam sayısının en fazla k.n olması demektir.Öyleyse, çelişki elde ettik.

Örnek: *1, 2, …, 50 sayılarından en az iki tanesinin ortak böleninin 1 den büyük olması için en az kaç sayı almalıyız*?

Çözüm: 1, 2, …, 50 sayıları içinde 16 asal vardır. Bu sayıların herhangi ikisinin ortak böleni birdir. Bunların dışında seçeceğimiz herhangi bir sayının A yazdığımız sayılarla ortak böleni olacağından 16+1 =17 sayı gerekir.

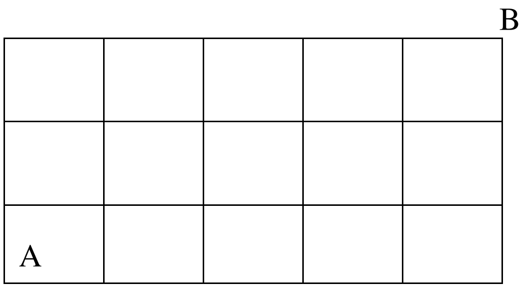
Örnek*: 1, 2, … , 100 sayılarının arasından 51 tanesi seçiliyor. Seçilen sayılar arasında biri diğerini bölen iki sayı olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Her sayı, 0≤k ve a tek sayı olmak üzere, $2^k.a$ şeklinde yazılabilir. a sayısı *1, 3, 5, … ,* 99 değerlerinden birini alırsa, seçeceğimiz 51 sayıdan en az ikisi aynı a sayısını içerir. Bu sayılar $2^s.a$ ve $2^r.a$ olsun.

Eğer; $s \le r$ ise $2^s.a \mid 2^r.a$

$r \le s$ ise $2^r.a \mid 2^s.a$ bulunur.

DİKDÖRTGEN IZGARADA EN KISA YOLLAR

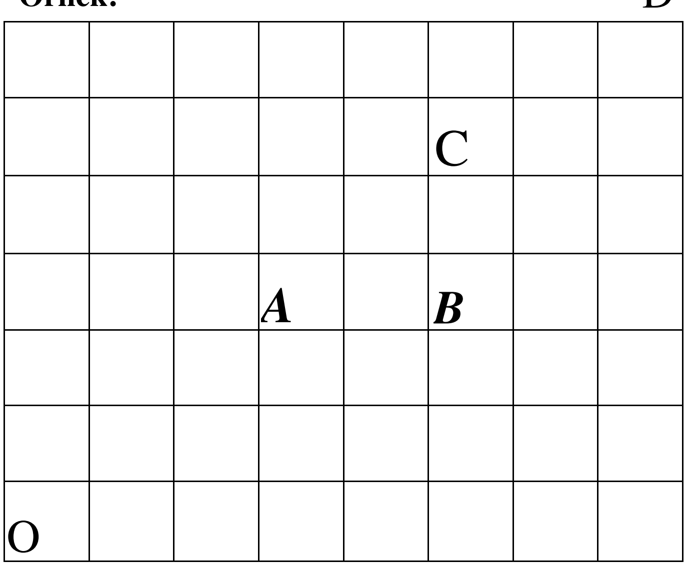


Şekilde A noktasından B noktasına en kısa yoldan gidebilmek için sadece sağa ve yukarı gitmeliyiz. Bu şekilde toplam olarak 5+3 = 8 hamle yaparız. Yukarı doğru yaptığımız hamleleri "a" ile sağa doğru yaptığımız hamleleri "b" ile gösterirsek, rotamızı 8 elemanlı bir harf dizisi olarak gösterebiliriz. Bu harf dizisini kaç farklı şekilde oluşturabileceğimize bakalım.

8 harften 3 ü "a", 5 i "b" olmalıdır. Dolayısıyla yazılabilecek farklı rotaların sayısı, $\binom{8}{3}=\binom{8}{5}$ olur.

Bunu genelleştirirsek, m x n lik bir ızgarada yazılacak *m+n harften m tanesi "a" ve n tanesi "b" olmalıdır*. Dolayısıyla yazılabilecek rotalar $\binom{m+n}{m}=\binom{m+n}{n}$ kadardır.

Örnek:



Yukarıdaki şekle göre, her şık için O dan D ye en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?

a) A kavşağından geçmek şartıyla,
b) AB caddesinden geçmek şartıyla,
c) AB caddesi trafiğe kapalı ise,
d) A ve C kavşaklarından geçmek şartıyla.

Çözüm: A(3,3), B(4,3), C(5,5), D(8,7)

a) $\binom{6}{3}\binom{9}{4}$ b) $\binom{6}{3}\binom{8}{4}$ c) $\binom{15}{7}-\binom{6}{3}\binom{8}{4}$

d) $\binom{6}{3}\binom{4}{2}\binom{5}{2}$

TEST I

1. $\binom{11}{1}+\binom{11}{3}+\binom{11}{5}+\dots\dots\dots\dots+\binom{11}{11}$

toplamının eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2^5 *B)* 2^7 *C)* 2^8 *D)* 2^9 *E)* 2^{10}

2. *5 kişi, 2 ve 3 kişilik iki yuvarlak masa etrafına kaç değişik şekilde oturabilirler?*

A) 20 B) 30 C) 48 D) 60 E) 72

3. $A=\{1,2,3,\dots\dots\dots\dots n\}$ *kümesinin 1'in bulunduğu 3'lü permü tasyonlarının sayısı 60 ise,* ***bu kümenin eleman sayısı kaçtır?***

A) 8 B)7 C) 6 D) 5 E) 4

4. *454555605 sayısının rakamları ile her 4'ün sağına 5 gelmek koşuluyla 9 basamaklı kaç tane çift sayı yazılabilir?*

A) 110 B) 190 C) 210 D) 220 E) 240

5. *Bir bilet kuyruğunda içlerinde Serkan ve Fatih'in bulunduğu 5 kişi vardır.*
Serkan daima Fatih'ten önde olacak şekilde kaç değişik sıralama yapılabilir?

A) 30 B) 60 C) 120 D) 240 E) 360

6. *4 mektup 3 posta kutusuna kaç değişik biçimde atılabilir?*

A) 12 B) 64 C) 81 D) 124 E) 256

7. *Herhangi üç doğrusal olmayan 9 nokta ile en çok kaç tane çokgen oluşturabilir?*

A) 358 B) 400 C) 442 D) 466 E) 496

8. $A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{2,3,4,5,6,7\}$

kümesinin elemanları ile birler basamağı A'dan onlar ve yüzler basamağı B'den alınarak rakamları farklı üç basa- maklı kaç tek sayı yazılır?

A) 42 B) 54 C) 60 D) 70 E) 120

9. $A=\{1,2,3,4,\dots\dots\dots\dots 8,9\}$ *kümesinin 2 elemanlı alt küme- lerinden kaç tanesinin elemanları ardışık değildir?*

A) 32 B) 30 C) 28 D) 24 E) 22

10. *Bir kutuda bulunan 12 toptan 5'i siyah, 4'ü beyaz ve 3'ü kırmızıdır.* ***Her renkten en az bir topu bulunduran 6 toptan oluşan grupların sayısı kaçtır?***

A) 480 B) 600 C) 720 D) 805 E) 900

***11.** Bir düzlemde bulunan 12 doğrudan 4'ü birbirine paralel, 5'i bir A noktasından geçmektedir.*

A noktası ile birlikte 12 doğrunun <u>en çok</u> kaç kesim noktası vardır?

A) 30 B) 32 C) 42 D) 51 E) 62

***12.** Bir otelde 4 yataklı bir oda 3 yataklı iki oda vardır. Aralarında Celal ve Orhan'ın olduğu 10 kişi bu oteldeki odalara, Celal ve Orhan aynı odada kalacak şekilde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?*

A) 560 B) 780 C) 1120 D) 1280 E) 2680

***13.** Bir babanın cüzdanında 8 tane 5 milyonluk ve 3 tane 10 milyonluk kağıt para vardır.*

Baba 25 milyon TL'yi oğluna kaç farklı şekilde verebilir?

A) 248 B) 208 C) 188 D) 104 E) 56

***14.** $A=\{1,3,5,7,9\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak rakamları tekrarsız tüm beş basamaklı sayılar küçükten büyüğe doğru sıralanıyor.*

Buna göre, baştan 95. sırada hangi sayı bulunur?

A) 79531 B) 79513
C) 79351 D) 79315
E) 79135

***15.** Kapalı çarşıya 5 giriş, 3 çıkış kapısı vardır.*

2 kişi aynı kapıdan girip farklı kapıdan çıkmak üzere, ***kaç değişik giriş-çıkış yapabilirler?***

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

16.** İçlerinde A ve B'nin bulunduğu 7 kişilik bir ekipte 3 farklı grup, 1. grupta 2, 2. grupta 2 ve 3. grupta 3 kişi olacak şekilde oluşturulacaktır.* ***A ve B isimli kişilerin aynı grupta olmaması koşuluyla oluşturulacak farklı grupların sayısı kaçtır?

A) 80 B) 100 C) 120 D) 160 E) 200

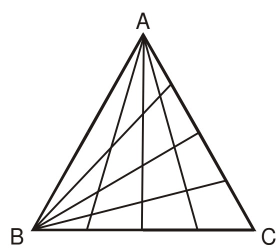
***17.** $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin elemanları ile iki basamağı aynı olan üç basamaklı kaç sayı yazılabilir?*

A) 70 B) 72 C) 84 D) 90 E) 94

***18.** $\binom{3n}{3n-2}+\binom{3n}{3n-1}=171 \Rightarrow n=?$*

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

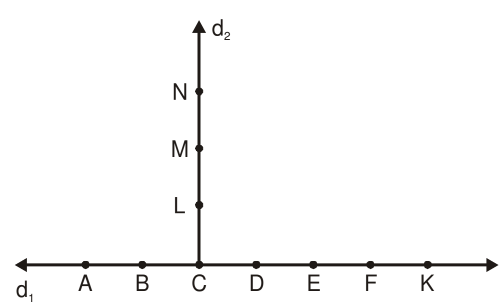
19.



Yukarıdaki şekilde kaç üçgen vardır?

A) 66 B) 64 C) 62 D) 60 E) 58

20.



Yukarıdaki şekilde $d_1 \perp d_2$ ve ardışık iki nokta arası uzaklık birbirine eşittir. Köşeleri bu 10 noktadan üçü olan kaç tane dik üçgen çizilebilir?

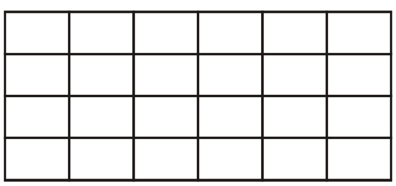
A) 18 B) 20 C) 21 D) 22 E) 24

TEST II

1. *8 çift ayakkabı vardır. Birbirine uymayan bir sağ bir sol olmak üzere bir çift ayakkabı kaç değişik şekilde seçilebilir?*
A) 8! B) 8!.2! C) 56 D) 48 E) 16

2. *8 kitap 4 öğrenciye eşit sayıda olmak üzere kaç farklı şekilde dağıtılabilir?*
A) 1280 B) 1440 C) 2180 D) 2520 E) 3240

3.



Şekilde bir nekarı 2 cm olan 24 tane kare vardır. ***Buna göre alanı 4 cm^2'den büyük olan kaç tane dikdörtgen vardır?***
A) 190 B) 186 C) 180 D) 176 E) 170

4. *Bir çember üzerinde birbirinden farklı 8 nokta veriliyor.* ***Köşeleri bu çember üzerindeki noktalar olan kaç tane çokgen çizilebilir?***
A) 256 B) 225 C) 221 D) 219 E) 205

5. *22200011 sayısının rakamların kullanılarak 8 basamaklı 10 ile tam bölünebilen kaç farklı sayı yazılabilir?*
A) 200 B) 220 C) 210 D) 200 E) 150

6. *Herhangi ikisi paralel olmayan aynı düzlem üzerindeki 12 doğrudan 3'ü A noktasından, 3'ü B noktasından 3'ü de C noktasından geçmektedir.*
Bu doğruların kesişiminden en çok kaç farklı nokta oluşur?
A) 55 B) 58 C) 60 D) 63 E) 66

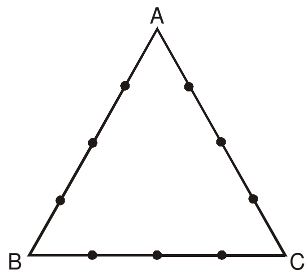
7. $7^0\binom{7}{0}+7^1\binom{7}{1}+\dots\dots\dots\dots+7^7\binom{7}{7}$ *ifadesinin sonucu kaçtır?*
A) 2^{19} *B)* 2^{20} *C)* 2^{21} *D)* 2^{22} *E)* 2^{23}

8. *9 farklı dikdörtgenin en fazla kaç kesim noktası vardır?*
A) 72 B) 144 C) 216 D) 288 E) 320

9. *5'i doğrusal 10 nokta birleştirilerek en fazla kaç tane beşgen çizilebilir?*
A) 126 B) 132 C) 144 D) 155 E) 160

10. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ *kümesinin elemanları kullanılarak iki rakamı tek, iki rakamı çift olan ve rakamları tekrarsız dört basamaklı kaç sayı yazılabilir?*
A) 72 B) 144 C) 720 D) 864 E) 1234

11.



Şekildeki ABC üçgeni üzerinde 12 farklı nokta vardır. ***Bu noktaları köşe kabul eden kaç değişik dörtgen çizilebilir?***

A) 40 B) 60 C) 120 D) 180 E) 270

12. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *kümesinin elemanları kullanılarak yazılabi- len rakamları farklı tüm 3 basamaklı sayıların toplamı kaçtır?*

A) 1110 B) 4440 C) 5550 D) 6660 E) 8880

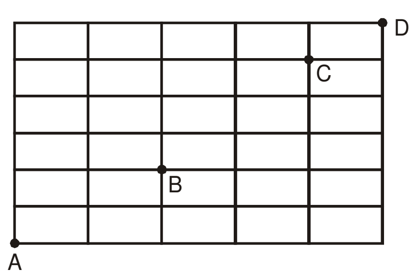
13. *1100225 sayısındaki rakamları yer değiştirerek 7 basamaklı kaç tane 25 ile tam bölünen sayı yazılabilir?*

A) 42 B) 56 C) 64 D) 68 E) 72

14. *Bir torbadaki bordo bilyelerin sayısı beyaz bilyelerin sayısından 2 fazladır. Bu torbadan 224 farklı şekilde en az iki tanesi bordo olan 3 bilye seçilebiliyor.* ***Buna göre torbada toplam kaç bilye vardır?***

A) 6 B) 8 C) 12 D) 14 E) 18

15.



Şekilde A noktasından D noktasına gitmek isteyen birisi B ve C noktalarından geçmek üzere A'dan D'ye en kısa yoldan gitmek üzere kaç değişik yoldan gidebilir?

A) 60 B) 120 C) 140 D) 180 E) 200

16. *7 tabanındaki rakamları farklı 3 basamaklı kaç tane sayı yazılabilir?*

A) 25 B) 50 C) 75 D) 105 E) 180

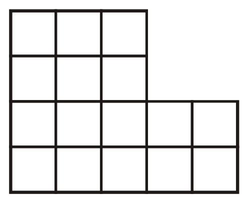
17. $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{8}{4}+\binom{9}{5}+\binom{10}{6}+\binom{11}{7}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\binom{12}{5}$ *B)* $\binom{13}{6}$ *C)* $\binom{12}{6}$ *D)* $\binom{12}{8}$

E) $\binom{13}{5}$

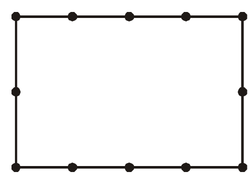
18.



Yukarıdaki şekil eş karelerden oluşturulmuştur. Şekilde kaç tane dikdörtgen vardır?

A) 105 B) 95 C) 87 D) 75 E) 70

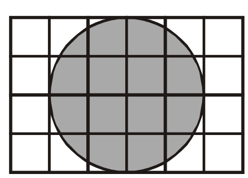
19.



Şekilde dikdörtgenleri üzerinde bulunan noktalar birleşti- rilerek en fazla kaç tane üçgen çizilebilir?

A) 90 B) 108 C) 110 D) 112 E) 198

20.



Şekilde taralı dairenin herhangi bir parçasını kapsayan kaç farklı dikdörtgen vardır?

A) 150 B) 160 C) 170 D) 190 E) 200